CHAPITRE 7

# Vecteurs. Colinéarité

## ACTIVITÉS (page 167)

### Activité 1

**2** **a)** En C3 on obtient 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
**b)** On peut prendre pour coordonnées de D : (5 ; 3) ; (–1 ; 0) ; (7 ; 4) ; etc.
Chaque fois, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**3** XY' – X'Y = 0.

### Activité 2

**1** **b)** $\vec{u}(5\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;3)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

**2** **b)** $\overrightarrow{AD} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Pour $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{4}{3}$ : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

**3** « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non colinéaires. Pour tout point M, il existe un couple unique de nombres $(a\,;b)$ tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ».

## PROBLÈME OUVERT

Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AI})$ :
J(1 ; 0), I(0 ; 1), B(4 ; 0), D(0 ; 3), C(4 ; 3) et $K\left(4\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

La droite (LK) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_I - y_J}{x_I - x_J} = \dfrac{1}{-1} = -1$,
donc (LK) a une équation de la forme $y = -x + p$.
Or $K \in (LK)$ ;
donc $\dfrac{3}{2} = -4 + p$, soit $p = \dfrac{11}{2}$,
d'où : $y = -x + \dfrac{11}{2}$.

Or L a pour ordonnée 3, donc son abscisse est telle que $3 = -x + \dfrac{11}{2}$ soit $x = \dfrac{5}{2}$, et L a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}\,;3\right)$.

La droite (IK) a pour équation $y = \dfrac{1}{8}x + 1$ et (JL) a pour équation $y = 2x - 2$.
L'intersection de ces deux droites est $M\left(\dfrac{8}{5}\,;\dfrac{6}{5}\right)$.

De plus, la droite (AC) a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x$, et $M \in (AC)$.
Donc les trois droites sont concourantes.

# EXERCICES Application (page 172)

**1** **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2\,;1)$.
« A, M, B alignés » équivaut à $2-5(x+2)=0$ soit $x=-\dfrac{8}{5}$.

**2.** $\overrightarrow{CM}\left(-\dfrac{8}{5}-2\,;0-(-3)\right)$ soit $\overrightarrow{CM}\left(-\dfrac{18}{5}\,;3\right)$ ; $\overrightarrow{BD}(6\,;-5)$.

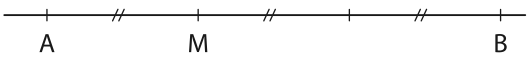
On a $\overrightarrow{BD}=-\dfrac{5}{3}\,\overrightarrow{CM}$, donc les droites (BD) et (CM) sont parallèles.

**2** « $M\in(AB)$ » équivaut à « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires ».
$\overrightarrow{AB}(2\,;5)$ et $\overrightarrow{AM}\left(-3\,;-\dfrac{15}{2}\right)$,
donc $\overrightarrow{AM}=-\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$ et M est un point de (AB).

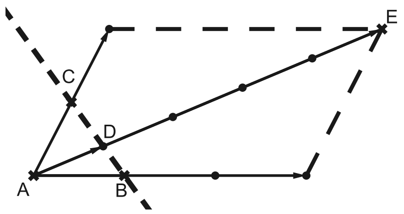
**3** $\overrightarrow{AB}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;-3-y)$.
« (AB) // (CD) » équivaut à « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires »
soit $-12-4y-4=0$. Il en résulte que $y=-4$.

**4** $\overrightarrow{AB}(8\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;y+4)$.
« $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires » équivaut à $8y+32-8=0$
soit $y=-3$.

**5** **1.** $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}$
donc $-3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ soit $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$.
**2.** Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc M est un point de la droite (AB).

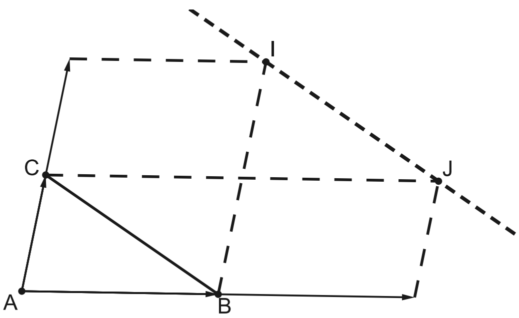



**6** **1.** On construit E tel que $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ puis D tel que $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{5}\,\overrightarrow{AE}$.




**2. a)** $5\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
donc $5\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{BC}$.
**b)** $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et B, C, D sont alignés.

**7** **1.**




**2. a)** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
$\quad=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
**b)** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CB}$, donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

**8** $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=3\overrightarrow{AC}$,
donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A, G, C sont alignés.

**9** **1.** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{BC}$ ;

$$\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}+3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$$
$$=-\frac{5}{2}\,\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=5\left[-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\,\overrightarrow{BC}\right]=5\overrightarrow{IJ}.$$

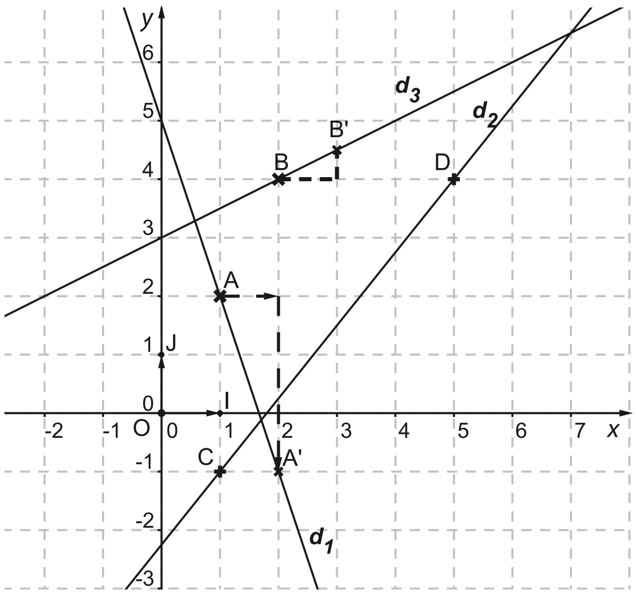
Donc $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et les points I, J, L sont alignés.

**10** **a)** $d$ a une équation de la forme : $3x-2y+c=0$.
Or $A\in d$, donc $3\times(-2)-2\times5+c=0$ soit $c=16$.
$d$ a donc pour équation : $3x-2y+16=0$.
**b)** $d$ a une équation de la forme $y=\dfrac{2}{3}\,x+p$.
Or $A(-5\,;3)\in d$,
donc $3=-\dfrac{10}{3}+p$ et $p=\dfrac{19}{3}$.
Donc $d$ a pour équation : $y=\dfrac{2}{3}\,x+\dfrac{19}{3}$.

**11** $\overrightarrow{AB}(2\,;3)$ est un vecteur directeur de $d$ donc $d$ a une équation de la forme $3x-2y+c=0$.
Or $C(-4\,;6)\in d$, donc $3\times-4-2\times6+c=0$.
Il en résulte que $c=24$ et $d$ a pour équation : $3x-2y+24+0$.

**12** $\Delta$ a une équation de la forme $2x-3y+c=0$.
Or $A(-1\,;2)\in\Delta$, donc $2(-1)-3\times2+c=0$ et $c=8$.
Donc $\Delta$ a pour équation : $2x-3y+8=0$.

**13** **a)** $d_1=(AA')$ avec $A'(2\,;-1)$.
**b)** $d_2=(BB')$ avec $B'\left(3\,;\dfrac{9}{2}\right)$.
**c)** $d_3=(CD)$ avec $C(1\,;-1)$ et $D(5\,;4)$.




**14** $15y=10x-3$ soit $10x-15y-3=0$.
Le vecteur $\vec{v}(15\,;10)$ est un vecteur directeur de $d$,
donc $\vec{u}=\dfrac{1}{5}\,\vec{v}$ soit $\vec{u}(3\,;2)$ est aussi un vecteur directeur de $d$.

**15** **a)** $\overrightarrow{AB}(4\,;\,2)$ donc (AB) a une équation de la forme $2x - 4y + c = 0$.
Or $B(2\,;\,5) \in (AB)$, donc $4 - 20 + c = 0$ soit $c = 16$.
(AB) a pour équation $2x - 4y + 16 = 0$ ou $x - 2y + 8 = 0$.
**b)** $\overrightarrow{OA}(-2\,;\,3)$ est un vecteur de $\Delta$, donc $\Delta$ a une équation de la forme : $3x + 2y + c = 0$.
Or $C(3\,;\,1) \in \Delta$, donc $9 + 2 + c = 0$ et $c = -11$.
Ainsi, $\Delta$ a pour équation : $3x + 2y - 11 = 0$.

**16** **a)** $d$ a une équation de la forme $2x - y + c = 0$ et $A(0\,;\,1) \in d$ ; donc $c = 1$ et $d$ a pour équation $2x - y + 1 = 0$.
**b)** De même, $\Delta$ a pour équation $\dfrac{4}{5}x - \dfrac{5}{7}y - \dfrac{9}{20} = 0$ ou $28x - 25y - 9 = 0$.

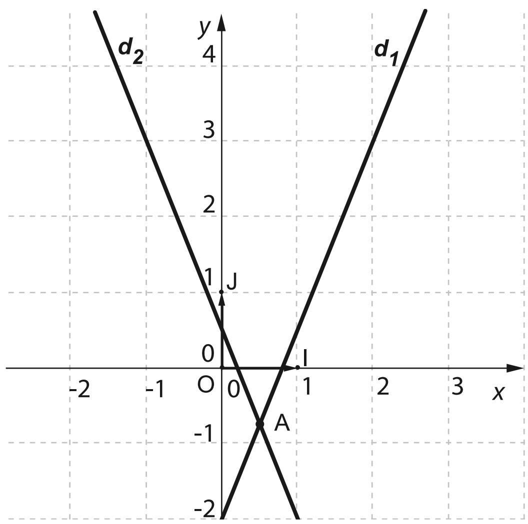
**17** **a)** $d$ a pour équation $x - 7y + 17 = 0$.
**b)** I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ ;
donc $d$ a pour équation : $3x - 5y + 3 = 0$.

**18** $\overrightarrow{AB}(3\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-9\,;\,-12)$ ; $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, et C est un point de la droite (AB).

**19** Soit I le milieu de [AC] ;
I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IB}\left(-\dfrac{7}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{IB}$ est un vecteur directeur de la médiane qui passe par B.
Elle a pour équation $x + 7y - 5 = 0$.

**20** **a)** $\vec{u}\left(\dfrac{4}{7}\,;\,1\right)$ et $\vec{u}'\left(1\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ ;
$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{5}{3} - 1 \times 1 = \dfrac{20}{21} - 1 = -\dfrac{1}{21} \neq 0$,
donc $d$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles.
**b)** $\vec{u}(-4{,}5\,;\,3)$ et $\vec{u}'(-3\,;\,2)$ ; $-4{,}5 \times 2 - (3)(-3) = -9 + 9 = 0$,
donc $d$ et $\Delta$ sont parallèles.
**c)** $\vec{u}(3\,;\,2)$ et $\vec{u}'(0{,}6\,;\,0{,}4)$ ; $3 \times 0{,}4 - 2 \times 0{,}6 = 0$,
donc $d$ et $\Delta$ sont parallèles.

**21** **1.** La droite d'équation $5x - 2y - 4 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\,5)$.
La droite d'équation $y = -2{,}5x + 0{,}5$ ou $2{,}5x + y - 0{,}5 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}'(-1\,;\,2{,}5)$.
$2 \times 2{,}5 + 1 \times 5 = 10 \neq 0$, donc ces deux droites sont sécantes.
**2.**



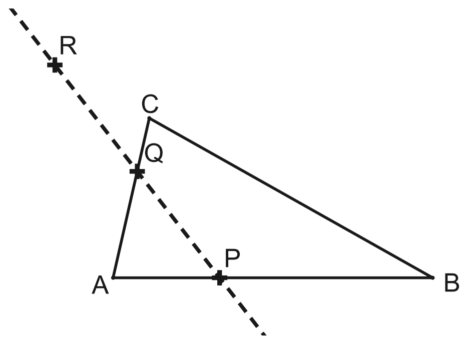

Leur point d'intersection A a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{3}{4}\right)$.

**22** La droite (AB) a pour coefficient directeur
$m = \dfrac{5-2}{3+1} = \dfrac{3}{4}$ et $d'$ a pour coefficient $0{,}75 = \dfrac{3}{4}$.
Ainsi, $d$ et $d'$ sont parallèles.

**23** $d$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;\,2)$ et $\Delta$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(2\,;\,m)$ ;
$d \,/\!/\, \Delta \Leftrightarrow 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

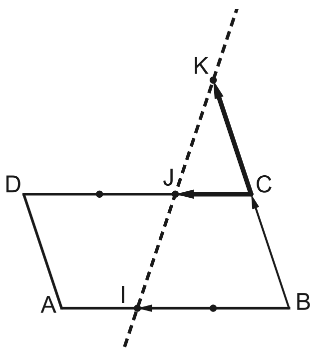
**24** $d$ a pour vecteur directeur $(1\,;\,-3)$ et $\Delta$ a pour vecteur directeur $(m - 3\,;\,1 - 2m)$.
$d \,/\!/\, \Delta \Leftrightarrow 1 - 2m + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 8$.

**25** **1.**




**2. a)** On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
• $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow P\left(\dfrac{1}{3}\,;\,0\right)$.
• $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ;
donc $Q\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.
• $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{CR} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB} = -\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$,
donc $\overrightarrow{AR} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$, donc $R\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.
**b)** On se place dans le repère $(B\,;\,\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
• $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ;
donc $P\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.
• $\overrightarrow{CR} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BR} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BR} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ ;
donc $R\left(\dfrac{4}{3}\,;\,0\right)$.
• $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = 3(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ})$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ;
donc $Q\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.
**c)** On se place dans le repère $(C\,;\,\overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ})$.
• $R(1\,;\,0)$ et $Q(0\,;\,1)$ (immédiat).
• $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
Or $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CR}$ ; donc $3\overrightarrow{CP} = 6\overrightarrow{CQ} - 3\overrightarrow{CR}$,
soit $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CR} + 2\overrightarrow{CQ}$.
Donc $P(-1\,;\,2)$.
**3. a)** et **b)** On choisit le repère $(C\,;\,\overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ})$ : $\overrightarrow{RQ}(-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{RP}(-2\,;\,2)$. Donc $\overrightarrow{RP} = 2\overrightarrow{RQ}$, ce qui prouve que les points P, Q, R sont alignés.

**26** **1.**




**2. a)** Ce choix n'est pas le plus pertinent.

**3.** Dans le repère $(C\,;\,\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK})$ :

$I(2\,;-1)$, $J(1\,;0)$, $K(0\,;1)$ ;

donc $\overrightarrow{JK}(-1\,;1)$ et $\overrightarrow{JI}(1\,;-1)$.

Ainsi : $\overrightarrow{JK} = -\overrightarrow{IJ}$,

ce qui prouve que les points I, J, K sont alignés.

## EXERCICES Activités de recherche (page 178)

**31** **Choisir un repère**

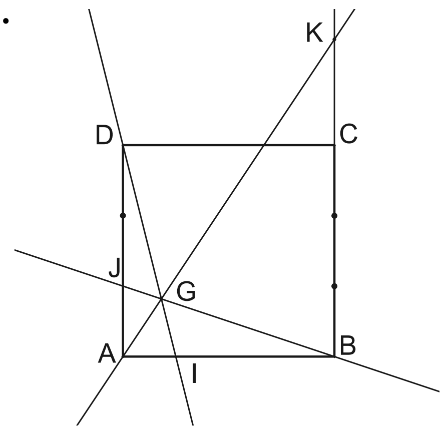
• ***L'outil :***

– Colinéarité dans un repère.

• ***L'objectif :***

– Exploiter les coordonnées dans un repère choisi.

**1.**




**2.** Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ : $B(4\,;0)$, $D(0\,;3)$ et $C(4\,;3)$.

**3. a)** (DI) a pour équation : $3x + y - 3 = 0$.

(BJ) a pour équation : $x + 4y - 4 = 0$.

**b)** $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 4y = -12 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11x = -8 \\ 3x + y = 3. \end{cases}$

Donc $x = \dfrac{8}{11}$ et $y = 3 - \dfrac{24}{11} = \dfrac{7}{11}$,

et G a pour coordonnées $\left(\dfrac{8}{11}\,;\dfrac{7}{11}\right)$.

**4.** $K(4\,;y)$ donc $\overrightarrow{AK}(4\,;y)$ ; $\overrightarrow{AG}\left(\dfrac{8}{11}\,;\dfrac{7}{11}\right)$.

$\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires donc $4 \times \dfrac{7}{11} - \dfrac{8}{11} = 0$ soit $y = \dfrac{7}{2}$.

Donc K a pour coordonnées $\left(4\,;\dfrac{7}{2}\right)$.

$\overrightarrow{KB} = -\dfrac{7}{2}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{KC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{KB} = 7\overrightarrow{KC}$.

**32** **Étudier la position relative de trois droites**

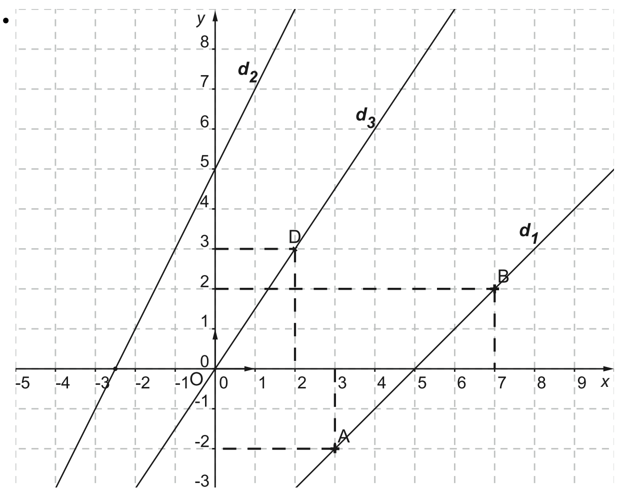
• ***L'outil :***

– Équations de droites.

• ***L'objectif :***

– Exploiter une stratégie pour démontrer que trois droites sont concourantes.

**1.**




**2. a)** $d_1$ a pour coefficient directeur : 1 ;

$d_2$ a pour coefficient directeur : 2 ; et $d_3$ : $\dfrac{3}{2}$.

Donc les droites ne sont pas parallèles deux à deux.

**b)** $d_3$ a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

**c)** $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x \\ 2x - \dfrac{3}{2}x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -15 \end{cases}.$

Le point M a pour coordonnées $(-10\,;-15)$.

**d)** $\overrightarrow{AM}(-13\,;-13)$ et $\overrightarrow{AB}(4\,;4)$, donc $4\overrightarrow{AM} = -13\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc $M \in (AB)$.

### 33 Étudier une configuration

• ***Les outils :***
– Colinéarité de vecteurs.
– Coordonnées du milieu d'un segment.
• ***Les objectifs :***
– Exploiter les coordonnées dans un repère choisi.
– Savoir utiliser la colinéarité pour prouver un alignement et un parallélisme.

**1.** B(1 ; 0), D(0 ; 1) et C(1 ; 1).

**2. a)** M($m$ ; $y$) ; $\overrightarrow{DB}(1\,;-1)$ et $\overrightarrow{DM}(m\,;y-1)$, donc :
D, B, M alignés $\Leftrightarrow 1 \times (y-1) + m = 0 \Leftrightarrow y = 1 - m$.

**b)** M est le milieu de [CN], donc $x_C + x_N = 2x_M$ et $y_C + y_N = 2y_M$, ce qui donne $x_N = 2m - 1$ et $y_N = 1 - 2m$.

**c)** P(0 ; $1 - 2m$) et Q($2m - 1$ ; 0).

**d)** $\overrightarrow{PM}(m\,;m)$, $\overrightarrow{PQ}(2m-1\,;2m-1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;1)$.
Ces trois vecteurs sont colinéaires, donc les points P, Q, M sont alignés et (PQ) est parallèle à (AC) donc garde une direction fixe.

### 34 Narration de recherche

**1.** $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Soit $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{CI}$ donc les droites (AJ) et (IC) sont parallèles.

**2.** On peut aussi considérer le repère $(A\,;\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
C(1 ; 0), $I\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ et J(–2 ; 1).
Ainsi, $\overrightarrow{IC}\left(1\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AJ}(-2\,;1)$, soit $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{CI}$ d'où la conclusion.

### 35 Narration de recherche

Dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BI})$ :
J(1 ; 0), I(0 ; 1), M(0 ; –1) et N(3 ; 0) ; donc $K\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{IJ}(1\,;-1)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$.
Ainsi, les vecteurs sont colinéaires et les points I, J, K sont alignés.

### 36 Narration de recherche

**1.** Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ})$ :
B(1 ; 0), J(0 ; 1), $I\left(\frac{3}{4}\,;0\right)$ et C(0 ; 3).
• $3\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BJ}$.

$$3\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AJ},$$

donc $K\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{CI}\left(\frac{3}{4}\,;-3\right)$ et $\overrightarrow{CK}\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{8}{3}\right)$ ;

$\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{3}\right) - (-3)\left(\frac{2}{3}\right) = -2 + 2 = 0$,
donc les points C, I, K sont alignés.

**2.** $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ donc $\vec{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.
Ainsi, la droite (AK) a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et son équation réduite est $y = \frac{1}{2}x$.
De plus, (BC) a pour équation $3x + y - 3 = 0$.
Le point G, intersection de ces deux droites, a pour coordonnées ($x$ ; $y$) telles que $y = \frac{1}{2}x$ et $3x + y - 3 = 0$, soit $y = \frac{1}{2}x$ et $3x + \frac{1}{2}x - 3 = 0$.
Donc : $x = \frac{6}{7}$ et $y = \frac{3}{7}$.
$\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{7}\,;\frac{3}{7}\right)$ et $\overrightarrow{BC}(-1\,;3)$.
Il en résulte que $\overrightarrow{BC} = 7\overrightarrow{BG}$ ou $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$ et $k = \frac{1}{7}$.

### 37 TP – Étudier la position relative de trois droites

**1.** Voir page 180.

**3. a)** • $\overrightarrow{AM}(a+1\,;b+1)$, $\overrightarrow{BQ}(1\,;b)$ et $\overrightarrow{CP}(a\,;1)$.
• $\overrightarrow{BQ}$ colinéaire à $\overrightarrow{CP}$ équivaut à $1 - ab = 0$ soit $ab = 1$.
De même, $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{BQ}$ équivaut à $b(a+1) - b - 1 = 0$ soit $ab = 1$.
Donc les trois vecteurs sont colinéaires si et seulement si $ab = 1$.
Ainsi, lorsque M est un point de $\mathscr{C}$, les droites (AM), (BQ) et (CP) sont parallèles.

**b)** • (BQ) a une équation de la forme $bx - y + c = 0$.
B $\in$ (BQ) donc $-b + c = 0$ soit $c = b$.
Donc (BQ) a pour équation $bx - y + b = 0$.
• De même, (CP) a pour équation $x - ay - a = 0$.
• Les coordonnées de N vérifient le système
$\begin{cases} bx - y = -b \\ x - ay = a \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} -abx + ay = ab \\ x - ay = a \end{cases}$ si $a \neq 0$

soit $\begin{cases} x(1-ab) = a(1+b) \\ y = \dfrac{x-a}{a} \end{cases}$

donc $x = \frac{a(1+b)}{1-ab}$ et $y = \frac{b(1+a)}{1-ab}$.
Si $a = 0$, $x = 0$ et $y = b$.
• $\overrightarrow{AM}(a+1\,;b+1)$ et $\overrightarrow{AN}\left(\frac{a+1}{1-ab}\,;\frac{b+1}{1-ab}\right)$.
$(a+1)\left(\frac{b+1}{1-ab}\right) - (b+1)\left(\frac{a+1}{1-ab}\right) = 0$, donc M, N, A sont trois points alignés.

### 38 TP – Droite mobile autour d'un point fixe

**1.** Voir page 181.

**3. a)** • (AB) a pour équation $x + y - 1 = 0$ et (BC) a pour équation $x - y + 1 = 0$.
• Les coordonnées de M vérifient :
$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y = mx \end{cases}$ soit $\begin{cases} x(1+m) = 1 \\ y = mx \end{cases}$.
Comme $m \neq -1$, M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{1+m}\,;\frac{m}{1+m}\right)$.
De même, $N\left(\frac{1}{m-1}\,;\frac{m}{m-1}\right)$ avec $m \neq 1$.

**b)** • $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $\left(\frac{m+2}{m+1}\,;\frac{m}{1+m}\right)$ avec $m \neq -1$, colinéaire à $\vec{u}(2+m\,;m)$.
(CM) a une équation de la forme $mx - (2+m)y + c = 0$ ; or C(–1 ; 0) $\in$ (CM), donc $c = m$ et (CM) a pour équation $mx - (2+m)y + m = 0$.

**c)** $\overrightarrow{AN}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2-m}{m-1}\,;\frac{m}{m-1}\right)$ avec $m \neq 1$, donc colinéaire à $\vec{v}(2-m\,;m)$.
La droite (AN) a pour équation $mx - (2-m)y - m = 0$.

**d)** Les coordonnées de P vérifient :

$\begin{cases} mx-(2+m)y+m=0 \\ mx-(2-m)y-m=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -2my+2m=0 \\ mx-(2-m)y-m=0 \end{cases}$

soit, comme $m \neq 0$ : $\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{2}{m} \end{cases}$.

Donc le point P appartient à la droite d'équation $y = 1$.

# EXERCICES Entraînement (page 182)

## DE TÊTE

**39** A(0 ; 1) et B(–1 ; 0).

**40** $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - 3 \times 4 = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**41** $12 + 2x = 0$ soit $x = -6$.

**42** $y = 3x + 2$.

**43** $\vec{u}(5 ; 2)$ et $A \in d$.

**44** $\vec{u}(3 ; -2)$.

**45** $2\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(-5 ; 7)$.

## VECTEURS COLINÉAIRES

**46** **a)** $\vec{u} = 3\vec{v}$ : ces vecteurs sont colinéaires.
**b)** $\vec{u} = -6\vec{v}$ : ces vecteurs sont colinéaires.

**47** $\vec{u}\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4}\right)$, $\vec{v}(x ; -1)$ et $\frac{1}{2} \times (-1) + \frac{3}{4}(x) = 0$.

Soit $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$.

**48** *Corrigé dans le manuel.*

**49** **a)** $\overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{6}\right)$ ; $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AC}$ : ces vecteurs sont colinéaires.

**50** $\overrightarrow{MN}(5 ; 2)$ et $\overrightarrow{MP}\left(x ; -\frac{3}{5}\right)$ ; $-3 - 2x = 0$ soit $x = -\frac{3}{2}$.

**51** $\overrightarrow{AB}(-5 ; -1)$ ; $\overrightarrow{AM}(x-3 ; -2)$ ; $\overrightarrow{AN}(-3 ; y-2)$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires : $10 + x - 3 = 0$ soit $x = -7$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires : $10 - 5y - 3 = 0$ soit $y = \frac{7}{5}$.

**52** M(5 ; $y$) ; $\overrightarrow{AB}(2 ; 2)$, $\overrightarrow{CM}(3 ; y+3)$.
(AB) // (CM) $\Leftrightarrow 2y + 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Le point M a pour ordonnée 0.

**53** *Corrigé dans le manuel.*

**54** $\overrightarrow{AB}(6 ; 2)$ et $\overrightarrow{OC}(27 ; 9)$ ; $6 \times 9 - 27 \times 2 = 0$ donc (AB) // (OC).

**55** **2.** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

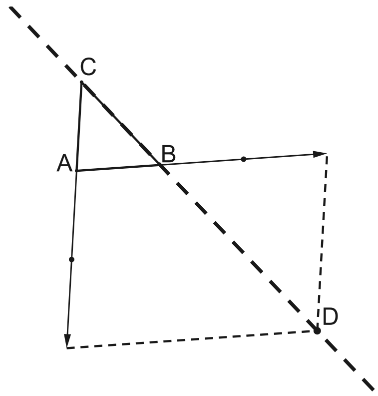
Les points B, C, D sont donc alignés.

**56** **a)** $t = -2$ ; $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$.
**b)** $t = \frac{5}{3}$ ; $\overrightarrow{MA} = \frac{5}{3}\overrightarrow{MB}$.
**c)** $t = \frac{2}{5}$ ; $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MB}$.

## EXPRESSION D'UN VECTEUR EN FONCTION DE DEUX VECTEURS NON COLINÉAIRES

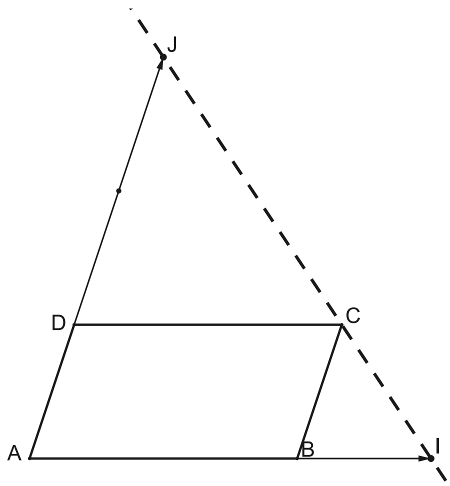
**57** $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ ; $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ; $\vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{i} - 4\vec{j}$.

**58** **1.**




**2. a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$,
donc $\overrightarrow{BD} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{CB}$.
**b)** $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CB}$ : les vecteurs sont colinéaires et B, D, C sont trois points alignés.

**59** **1.**




**2. a)** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**b)** $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IC}$, donc I, J, C sont alignés.

**60** *Corrigé dans le manuel.*

**61** **1.** $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DE} = 3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = 3\overrightarrow{CE}$.
**2.** $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc B, E, C sont alignés.

**62** **1.** $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IC}$.
**2. a)** $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{IC}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires.
**b)** Il en résulte que les droites (AP) et (CI) sont parallèles.

## CHOISIR UN REPÈRE

**63** *Corrigé dans le manuel.*

**64** **1.** On choisit $(C ; \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP})$.
**2.** M(1 ; 0) ; P(0 ; 1) ; B(0 ; –2) ; D(3 ; 0) ; A(3 ; –2).
$\overrightarrow{AM}(-2 ; 2)$ et $\overrightarrow{MP}(-1 ; 1)$,
donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MP}$ et les points A, M, P sont alignés.

**65** **1.** $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ ; $J\left(0 ; \frac{5}{4}\right)$ ; K(x ; y) avec $1 - x + 5(-x) = 0$ et $-y + 5(1 - y) = 0$, donc $x = \frac{1}{6}$ et $y = \frac{5}{6}$.
**2.** $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{5}{4}\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{3} ; \frac{5}{6}\right)$ ; or $-\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = 0$, donc I, J, K sont alignés.

**66** *Corrigé dans le manuel.*

**67** Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$ :
C(1 ; 0), I(0 ; 1), J(4 ; 0) et B(0 ; 4).
Donc : $\overrightarrow{IC}(1 ; -1)$ et $\overrightarrow{BJ}(4 ; -4)$.
Ainsi, $\overrightarrow{BJ} = 4\overrightarrow{IC}$, donc les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

## ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES

**68** **a)** $x - 3y + 14 = 0$. **b)** $y = 5$. **c)** $x = 1$.

**69** **a)** $\overrightarrow{AB}(-4 ; -3)$ donc $-3x + 4y - 17 = 0$.
**b)** $2x + 3y - 6 = 0$. **c)** $x = 4$. **d)** $y = -2$.

**70** **1. a)** $m = \frac{2}{3}$. **b)** $\frac{5}{3}$.
**2.** Si $y = \frac{3}{2}$, $2x - \frac{9}{2} + 5 = 0$ soit $x = -\frac{1}{4}$.

**71** **1.** C'est la droite $d_2$.
**2.** $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ ;
$d_3 : 2x + 3y - 6 = 0$ ;
$d_4 : 5x + 3y + 15 = 0$.

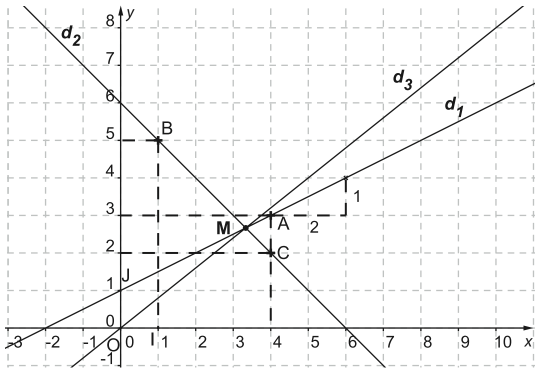
**72** *Corrigé dans le manuel.*

**73** **a)** $\vec{u}(2 ; 3)$ et A(–1 ; 1). **b)** $\vec{u}(3 ; 1)$ et A(1 ; 0).
**c)** $\vec{u}(-3 ; 2)$ et A(3 ; 0). **d)** $\vec{u}(8 ; 3)$ et $A\left(0 ; \frac{7}{4}\right)$.

**74** **1.** $\vec{u}(3 ; 7)$, $\vec{u}'(2 ; 5)$ et $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1 \neq 0$ ;
donc $d$ et $d'$ sont sécantes.
**2.** $\begin{cases} 7x - 3y + 2 = 0 \\ 5x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 28 \\ y = 66 \end{cases}$.

**75** **1.** $\overrightarrow{AB}(6 ; 8)$ et $\vec{u}(5 ; -1)$ ne sont pas colinéaires, donc $d$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles.
**2.** La droite (AB) a une équation de la forme $4x - 3y + c = 0$.
Or $A(0 ; -2) \in d$, donc $c = -6$
et $d$ a pour équation $4x - 3y - 6 = 0$.
• $\Delta$ a une équation de la forme $-x - 5y + c = 0$.
Or $C(-2 ; 3) \in \Delta$, donc $2 - 15 + c = 0$ d'où $c = 13$
et $\Delta$ a pour équation $x + 5y - 13 = 0$.
• $\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ x + 5y - 13 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -23y = -46 \\ x = 13 - 5y \end{cases}$
soit $y = 2$ et $x = 3$.
Le point d'intersection a pour coordonnées (3 ; 2).

**76** **1.**




**2.** $d_1$ a pour équation $x - 2y + 2 = 0$.
$d_3$ a pour équation $y = \frac{4}{5}x$.
Les coordonnées $(x ; y)$ du point M commun à ces deux droites vérifient : $y = \frac{4}{5}x$ et $-\frac{3}{5}x + 2 = 0$,
soit $x = \frac{10}{3}$ et $y = \frac{8}{3}$.
Donc M a pour coordonnées $\left(\frac{10}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.
On vérifie que B, C, M sont alignés :
$\overrightarrow{BC}(3 ; -3)$ et $\overrightarrow{BM}\left(\frac{7}{3} ; -\frac{7}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
Ainsi, les trois droites sont concourantes.

**77** *Corrigé dans le manuel.*

**78** **1.** $\overrightarrow{AB}(-p ; q)$, donc (AB) a une équation de la forme $qx + py + c = 0$.
Or $A(p ; 0) \in (AB)$,
donc $pq + c = 0$ et (AB) a pour équation : $qx + py - pq = 0$.
Or $pq \neq 0$, donc $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$.
**2.** (CD) a pour équation $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} - 1 = 0$, soit $2x - 3y - 6 = 0$.

**79** (AB) : $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} - 1 = 0$ ; (CD) : $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$.
Les coordonnées de M vérifient :
$\begin{cases} 4x + 5y - 20 = 0 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x = \frac{70}{23} \\ y = \frac{36}{23} \end{cases}$.

**80** **1.** (DI) : $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-1=0$ ou $4x+3y-12=0$ ;
(BJ) : $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}-1=0$ soit $x+2y-4=0$.
Donc C, intersection de ces droites, a pour coordonnées $\left(\frac{12}{5};\frac{4}{5}\right)$.

**2.** $\mathrm{M}\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2};1\right)$ et N(2 ; 2).
$\overrightarrow{\mathrm{PN}}\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$ et $\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}-1\times\frac{4}{5}=0$ ; donc les trois points sont alignés.

**81** **1.** $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};0\right)$, D(0 ; 2), $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2};2\right)$ et K(1 ; 1).

**2.** (DI) a pour équation : $x+\frac{y}{2}-1=0$ soit $2x+y-2=0$ ;
(BJ) a pour équation : $\frac{2}{3}x+y-1=0$ soit $2x+3y-3=0$.
Donc M a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$.

**3.** $\overrightarrow{\mathrm{KC}}\left(\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KM}}\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{KC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{KM}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ sont colinéaires, donc les points K, C, M sont alignés.

**82** **1.** A'(0 ; 2), C'(0 ; –1), B(1 ; 0) et $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{\mathrm{A'K}}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{C'K}}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.
Donc la droite (A'K) a une équation de la forme :
$-3x-y+c=0$.
Or A' ∈ (A'K), donc $c=2$ et (A'K) a pour équation :
$3x+y-2=0$.
**2. a)** De même, on démontre que (C'K) a pour équation $3x-y-1=0$.
(A'K) coupe (AB) en I d'ordonnée nulle, donc $\mathrm{I}\left(\frac{x}{3};0\right)$ et de même, $\mathrm{J}\left(\frac{1}{3};0\right)$.
**b)** Il en résulte que : $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{JI}}=\overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

## POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

**83** Δ a une équation de la forme $3x-2y+c=0$ et A(–1 ; 4) ∈ Δ ; donc $c=11$ et Δ a pour équation :
$3x-2y+11=0$.

**84** Δ a une équation de la forme $y=\frac{2}{3}x+c$
et A(–3 ; 5) ∈ Δ ; donc $c=7$ et Δ a pour équation $y=\frac{2}{3}x+7$.

**85** *Corrigé dans le manuel.*

**86** $d$ a pour vecteur directeur $\vec{u}=(3;m)$ et Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}'(2;3)$.
$d$ // Δ ⇔ $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires ⇔ $2m=9$ ⇔ $m=\frac{9}{2}$.

**87** **a)** $2x-y+5=0$ et $3x-5y+6=0$ sont sécantes car $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{u}'(5;3)$ ne sont pas colinéaires.
Le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\frac{19}{7};\frac{73}{7}\right)$.

**b)** $d$ a aussi pour équation $4x+y+3=0$ et $d'$ a aussi pour équation $4x+y-\frac{20}{3}=0$.
Les droites sont donc parallèles et distinctes.
**c)** $d'$ a aussi pour équation : $x+3y-6=0$ ; donc $d$ et $d'$ sont confondues.

**88** **a)** P ⇒ Q ; Q ⇒ P et P ⇔ Q.
**b)** Si $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont opposés, alors M est le milieu de [AB], donc AM = MB.
D'où P ⇒ Q.
• Mais MA = MB n'implique pas que M soit le milieu de [AB].
**c)** P n'implique pas Q ; exemple : CB = 2CA.
• Si C, A, B sont alignés, il existe $k$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=k\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ donc CA = $|k|$CB.
Ainsi : Q ⇒ P.
**d)** $d$ // $d'$ équivaut à $\vec{u}(-1;m)$ et $\vec{u}'(-m;1)$ sont colinéaires, équivaut à $-1\times1-m\times(-4)=0$ soit $mx=1$ ; donc P ⇔ Q.

**89**

```
VARIABLES
   a1 EST_DU_TYPE NOMBRE
   b1 EST_DU_TYPE NOMBRE
   c1 EST_DU_TYPE NOMBRE
   a2 EST_DU_TYPE NOMBRE
   b2 EST_DU_TYPE NOMBRE
   c2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE a1
   LIRE b1
   LIRE c1
   LIRE a2
   LIRE b2
   LIRE c2
   SI (a1*b2-a2*b1!=0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER «les droites sont sécantes.»
      FIN_SI
      SINON
         DEBUT_SINON
         SI (a1*c2==a2*c1) ALORS
            DEBUT_SI
            AFFICHER «Les droites sont
            confondues.»
            FIN_SI
            SINON
               DEBUT_SINON
               AFFICHER «Les droites sont
               parallèles (disjointes).»
               FIN SINON
         FIN SINON
FIN ALGORITHME
```

## AVEC LES TICE

**90** **2. a)** $\mathrm{M}(m;0)$ et $\mathrm{J}(0;y)$ ; $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2;-3)$ et $\overrightarrow{\mathrm{JM}}(m;-y)$.
Donc $-2y+3m=0$, $y=\frac{3}{2}m$ donc $\mathrm{J}\left(0;\frac{3m}{2}\right)$.
$\mathrm{I}(x;0)$ ; $\overrightarrow{\mathrm{CM}}(m;-4)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}(x;3)$.
Donc $3m+4x=0$, $x=-\frac{3m}{4}$ et $\mathrm{I}\left(-\frac{3m}{2};0\right)$.
**b)** $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3m}{4};\frac{3m}{2}\right)$, colinéaire à $\vec{v}(1;2)$, et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(2;4)$ ; donc : $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{v}$.
*Conclusion :* la droite (IJ) reste paralèle à (AC).

## ROC Restitution organisée de connaissances

**91** **1.** $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A\,;\, y - y_A)$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$

$\Leftrightarrow (y_B - y_A)\,x - (x_B - x_A)\,y + x_B y_A - x_A y_B = 0$ **[1]**

**2.** En appliquant **[1]** :

(AB) a pour équation : $2x - 6y + 12 + 10 = 0$,

soit $x - 3y + 11 = 0$.

Donc $M(-11\,;\,0)$ et $N\left(0\,;\,\frac{11}{3}\right)$.

## Prendre toutes les initiatives

**92** $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ -3\vec{u} + \vec{v} = 4\vec{w}\ (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ 4\vec{u} = -2\vec{w} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = -\dfrac{1}{2}\vec{w} \\ \vec{v} = \dfrac{5}{2}\vec{w}. \end{cases}$

Donc $\vec{v} = -5\vec{u}$.

**93** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$

$= (m+1)\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}$

$= (m+1)\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}$

$= (m-1)\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = (m-1)\,\overrightarrow{CB}$.

Donc, si $m \neq 1$, $\overrightarrow{PQ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CB}$.

Si $m = 1$, alors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

donc $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}$, soit $\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

**94** Dans le repère $(A\,;\, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ :

$I(1\,;\,0)$, $J(0\,;\,1)$, $B(4\,;\,0)$ et $C\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$ ;

(BC) a pour équation $\frac{x}{4} + \frac{2}{3}y - 1 = 0$

soit $3x + 8y - 12 = 0$ ;

(IJ) a pour équation $x + y - 1 = 0$.

Donc K a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{5}\,;\,\frac{9}{5}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{KB}\left(\frac{24}{5}\,;\,-\frac{9}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(-4\,;\,\frac{3}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{KB} = -\frac{6}{5}\,\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{KJ}\left(\frac{4}{5}\,;\,-\frac{4}{5}\right)$ et $\overrightarrow{IJ}(-1\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{KJ} = -\frac{4}{5}\,\overrightarrow{IJ}$.

# EXERCICES Approfondissement (page 187)

**95** **1.** Dans le repère $(A\,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ : $B(1\,;\,0)$ et $C(0\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{BC}(1\,;\,-1)$.

Avec $O(x\,;\,y)$ : $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{3} \times (-1)$ et $y = \frac{1}{3} \times 1$.

D'où $O\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

**2. a)** $d_1$ a pour équation $y = mx - m$ et $d_2$ a pour équation $y = mx + 1$.

**b)** I a pour abscisse $\frac{2}{3}$ et pour ordonnée $\frac{2}{3}\,m - m = -\frac{1}{3}\,m$ ;

J a pour ordonnée $\frac{1}{3}$ et pour abscisse $x = -\frac{2}{3m}$.

Donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\,m\right)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(-\frac{2}{3m}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AI} = -\,m\overrightarrow{AJ}$ et les points A, I, J sont alignés.

**96** $d_1$ a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$ et $d_2$ a pour équation $x + 2y - 6 = 0$.

$d_1$ et $d_2$ se coupent au point $M\left(\frac{16}{7}\,;\,\frac{13}{7}\right)$.

Les trois droites sont concourantes si et seulement si $\vec{w}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{12}{7}\,;\,\frac{27}{7}\right)$ : $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{w}(4\,;\,-9)\left(\overrightarrow{CM} = -\frac{3}{7}\,\vec{w}\right)$.

**97** **1.** $B(3\,;\,0)$, $D(0\,;\,4)$, $C(3\,;\,4)$, $L\left(\frac{1}{2}\,;\,4\right)$ et $K\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

**2. a)** (AC) a pour équation $y = \frac{4}{3}\,x$ et (IL) a pour équation $8x + y - 8 = 0$.

Ces droites se coupent en M de coordonnées $\left(\frac{6}{7}\,;\,\frac{8}{7}\right)$.

**b)** $\overrightarrow{JK}\left(3\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{JM}\left(\frac{6}{7}\,;\,\frac{1}{7}\right)$ ;

donc $\overrightarrow{JK} = \frac{7}{2}\,\overrightarrow{JM}$ et les trois droites sont concourantes.

**98** $I(t\,;\,0)$, $J(0\,;\,1-t)$ et $K(-t\,;\,1+t)$.

Donc $\overrightarrow{IJ}(-t\,;\,1-t)$ et $\overrightarrow{IK}(-2t\,;\,1+t)$.

Les points I, J, K sont alignés si et seulement si $-t(1+t) + 2t(1-t) = 0$ soit :

$-3t^2 + t = 0$ ou $t(1 - 3t) = 0$. Or $t \neq 0$, donc $t = \frac{1}{3}$.

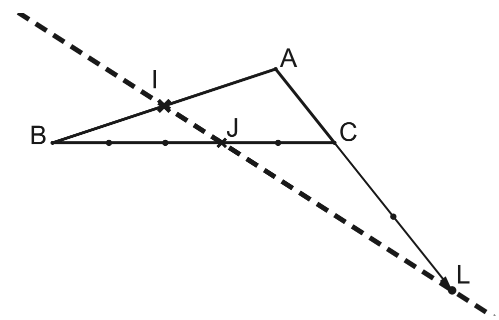
**99** **1.** Ces lignes ont pour but d'éliminer le cas où l'utilisateur a saisi les coordonnées de deux points confondus.

**2.**

```
20 a PREND_LA_VALEUR yN-yM
21 b PREND_LA_VALEUR xM-xN
22 c PREND_LA_VALEUR xN*yM-xM*yN
```

**3.** L'équation proposée par le logiciel est $2x + 3y - 9 = 0$.

**100** **1.**




**2. a)** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}$.

En effet : $2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$ car $3\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{LA}$,

donc $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$ ;

d'où $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = -\frac{5}{2}\,\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$.

**b)** Il en résulte que $\overrightarrow{IL} = 5\overrightarrow{IJ}$ et les points I, J, L sont alignés.

**101** **1.** $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ et $K(1\,;-1)$.

G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$,

donc G a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**2.** P a pour coordonnées $(0\,;y)$,

donc $\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{2}\,;y-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{MC}\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

M, P, C sont alignés, donc $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$ soit $y=\frac{4}{3}$.

Donc P a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{4}{3}\right)$.

• Q a pour coordonnées $(x\,;0)$,

donc $\overrightarrow{MQ}\left(x+\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$, et $\overrightarrow{MG}\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{7}{6}\right)$.

M, Q, G sont alignés, donc $-\frac{7}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=0$

soit $x=\frac{4}{7}$.

Donc Q a pour coordonnées $\left(\frac{4}{7}\,;0\right)$.

**3.** $\overrightarrow{PK}$ a pour coordonnées $\left(1\,;-\frac{7}{3}\right)$ et $\overrightarrow{QK}\left(\frac{3}{7}\,;-1\right)$.

Donc $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{QK}$ sont colinéaires et les points P, Q, K sont alignés.

**102** **1. a)** $A(a\,;0)$, $B(0\,;b)$, $A'(a\,;1)$ et $B'(1\,;b)$ ;
donc $\overrightarrow{A'B}(-a\,;b-1)$ et $\overrightarrow{AB'}(1-a\,;b)$.

$\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{AB'}$ colinéaires $\Leftrightarrow -ab-(1-a)(b-1)=0$
$\Leftrightarrow -ab-b+ab+1-a=0$
$\Leftrightarrow a+b=1$.

**b)** Dans ce cas : $\overrightarrow{A'B}(-a\,;-a)$, $\overrightarrow{A'B'}(b\,;b)$ et $\overrightarrow{OK}(1\,;1)$.
Ces trois vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.

**2. a)** La droite (OK) a pour équation $y=x$.

**b)** (A'B) a une équation de la forme $(b-1)x+ay+c=0$.
Or $B(0\,;b)\in(A'A)$, donc $c=-ab$. D'où le résultat.

**c)** $y=x$ et $(b-1)x+ay-ab=0$
donc $y=x$ et $(a+b-1)x=ab$.
Comme $a+b\neq 1$, M a pour coordonnées :
$\left(\frac{ab}{a+b-1}\,;\frac{ab}{a+b-1}\right)$.

**3.** $\overrightarrow{AB'}(1-a\,;b)$ et $\overrightarrow{AM}\left(\frac{a-a^2}{a+b-1}\,;\frac{ab}{a+b-1}\right)$.

Or $\frac{(1-a)ab}{a+b-1}-\frac{(a-a^2)b}{a+b-1}=0$, donc A, B', M sont alignés.
Il en résulte que les trois droites sont concourantes.

**103** • ***Démontrer***

**1. a)** $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{JI}$ car $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

**b)** $2\overrightarrow{JI}=-2\overrightarrow{JA}$ donc $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

**2.** $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MJ}+2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}$ ;
d'où $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MJ}$.
Il en résulte que, M, N, J sont alignés et la droite (MN) passe par le point fixe J quand M varie.

• ***Prolongement***

**1.** « $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BD}$ colinéaires » équivaut à « $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ colinéaires ».
L'ensemble des points M est donc la droite $d$ passant par J et parallèle à (BD).

**2.** $B(4\,;0)$, $D(0\,;3)$, $C(4\,;3)$, $I\left(4\,;\frac{3}{2}\right)$ et $J\left(2\,;\frac{3}{4}\right)$ ; $\overrightarrow{BD}(-4\,;3)$.
Donc $d$ a une équation de la forme : $3x+4y+c=0$ avec $J\in d$ donc $c=-9$ et $d$ a pour équation $3x+4y-9=0$.

**104** **1.** $\vec{u}(1\,;-m)$ est un vecteur directeur de $d$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$ pour tout $m$.
Donc l'affirmation est vraie.

**2.** $y=3-mx$ ; donc pour tout $x$, il existe $y$ unique tel que $M\in d_m$.
Donc l'affirmation est vraie.

**3.** Elle est fausse car si $m=0$, $y=3$ et $x$ est quelconque.

**4.** Faux, car si $M(0\,;y_0)$, il n'existe pas $m$ unique.

**5.** Vraie, car $A(0\,;3)$ appartient à $d_m$ pour tout $m$.

**105** ***Démontrer***

**a)** $\overrightarrow{AN_0}=2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN_2}=4\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{N_0N_2}=\overrightarrow{AN_2}-\overrightarrow{AN_0}$
$=4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
$=2(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

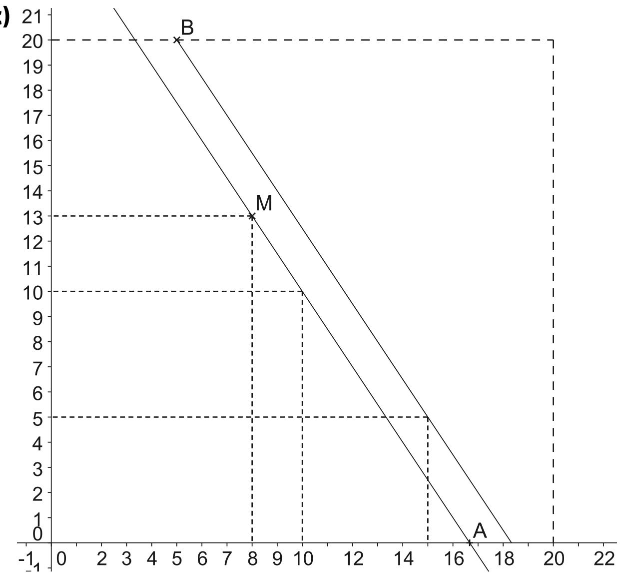
**b)** $\overrightarrow{N_0N}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AN_0}$
$=2k\overrightarrow{AB}+(2-k)\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AC}$
$=k(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

**c)** $\overrightarrow{N_0N}=\frac{k}{2}\overrightarrow{N_0N_2}$, donc ces vecteurs sont colinéaires.
N décrit la droite $(N_0N_2)$.

**106** **1. a)** $11=\frac{3x+2y}{5}$ soit $3x+2y-55=0$.

**b)** L'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées entières des points du segment [CD] contenus dans le carré de côté 20.

**c)**




**2.** $m=\frac{24+26}{5}=10$ ; donc M appartient à la droite d'équation $3x+2y-50=0$.
Les points sont sur le segment [AB].

**3.** ***Par le calcul***

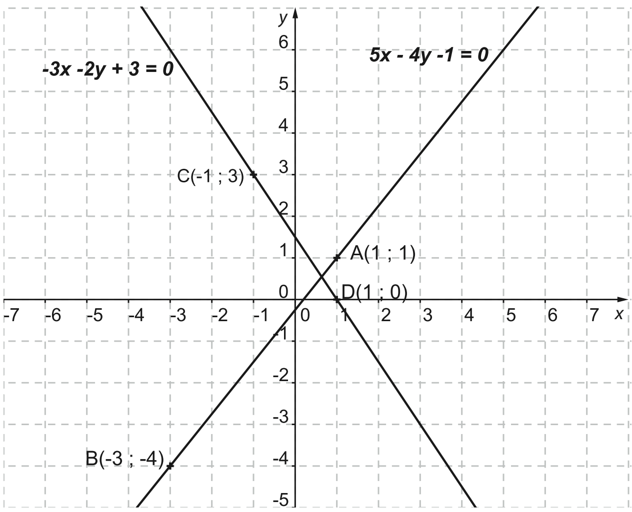
**a)** Comme $3x+2y=50$, on obtient :
$y=\frac{50-3x}{2}$, $x\in[0\,;20]$ et $y\in[0\,;20]$.

**b)** Pour que $y$ soit un entier, il faut que $50 - 3x$ soit un multiple de 2, donc que $x$ soit pair.

**c)** Si $x = 2k$, $y = \dfrac{50 - 6k}{2} = 25 - 3k$.

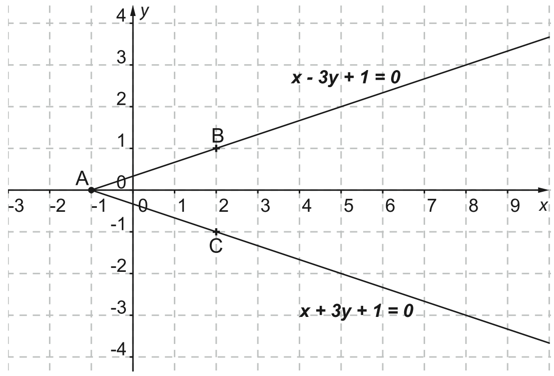
• pour $k = 0$ et $k = 1$ : $y > 20$, donc impossible ;
• $k = 2 : x = 4$ et $y = 19$ ;
• $k = 3 : x = 6$ et $y = 16$ ;
• $k = 4 : x = 8$ et $y = 13$ ;
• $k = 5 : x = 10$ et $y = 10$ ;
• $k = 6 : x = 12$ et $y = 7$ ;
• $k = 7 : x = 14$ et $y = 4$ ;
• $k = 8 : x = 16$ et $y = 1$.

**107** **a)** $(x - 3y + 1)^2 = (y - 4x + 2)^2$
$\Leftrightarrow (x - 3y + 1 - y + 4x - 2)(x - 3y + 1 + y - 4x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 4y - 1 = 0$ ou $-3x - 2y + 3 = 0$.
On obtient deux droites.




**b)** Si $y \geqslant 0$, $x - 3y + 1 = 0$ ;
si $y \leqslant 0$, $x + 3y + 1 = 0$.

On obtient deux demi-droites.




**108** $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
$\Leftrightarrow a(3\vec{i} + 2\vec{j}) + b(\vec{i} - 3\vec{j}) = (3a + b)\vec{i} + (2a - 3b)\vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 2a - 3b = 5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow a = 1$ et $b = -1$.

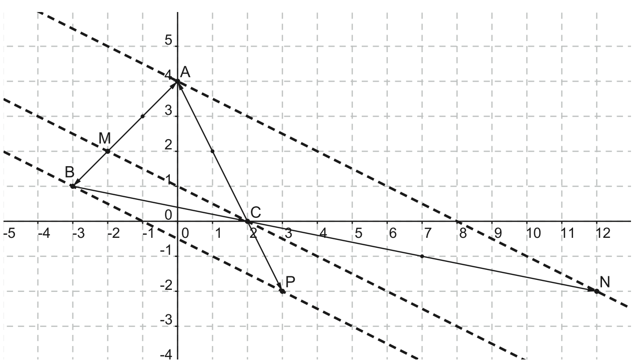
**109** **1.** $\overrightarrow{PA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \alpha\overrightarrow{AB}$ soit $(\alpha - 1)\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ;
donc $P\left(\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} ; 0\right)$.
• $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AC} = \gamma\overrightarrow{RA}$ ; donc $R\left(0 ; \dfrac{1}{1 - \gamma}\right)$.
• $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{QA} + \beta\overrightarrow{AC}$ soit $(1 - \beta)\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} - \beta\overrightarrow{AC}$ ;
donc $Q\left(\dfrac{1}{1 - \beta} ; -\dfrac{\beta}{1 - \beta}\right)$.

**2.** $\overrightarrow{PR}\left(-\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} ; \dfrac{1}{1 - \gamma}\right)$ et $\overrightarrow{PQ}\left(\dfrac{\alpha\beta - 1}{(1 - \beta)(\alpha - 1)} ; -\dfrac{\beta}{1 - \beta}\right)$.

P, Q, R alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha - 1)(1 - \beta)} - \dfrac{\alpha\beta - 1}{(1 - \beta)(\alpha - 1)(1 - \gamma)} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha\beta(1 - \gamma) - \alpha\beta + 1}{(1 - \beta)(\alpha - 1)(1 - \gamma)} = 0$
$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$.

## EXERCICES Travail en autonomie (page 190)

**A** **1. a) b)**




**2.** Les droites (AN), (MC) et (BP) semblent parallèles.

**3. a)** • $M(x ; y)$ ; $\overrightarrow{MB}(-3 - x ; 1 - y)$ et $\overrightarrow{MA}(-x ; 4 - y)$.
$2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow -6 - 2x - x = 0$ et $1 - y + 4 - y = 0$.
Ainsi, M a donc pour coordonnées $(-2 ; 2)$.

• $P(x ; y)$ ; $\overrightarrow{CP}(x - 2 ; y)$ et $\overrightarrow{CA}(-2 ; 4)$.
$\overrightarrow{CP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow x - 2 = 1$ et $y = -2$.
Ainsi, P a pour coordonnées $(3 ; -2)$.
• $N(x ; y)$ ; $\overrightarrow{CN}(x - 2 ; y)$ et $\overrightarrow{CB}(-5 ; 1)$.
$\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow x - 2 = 10$ et $y = -2$.
Donc N a pour coordonnées $(12 ; -2)$.

**b)** $\overrightarrow{AN}(12 ; -6)$, $\overrightarrow{CM}(-4 ; 2)$ et $\overrightarrow{BP}(6 ; -3)$.
Les trois vecteurs sont colinéaires à $\vec{u}(2 ; -1)$.
Il en résulte que les droites sont parallèles.

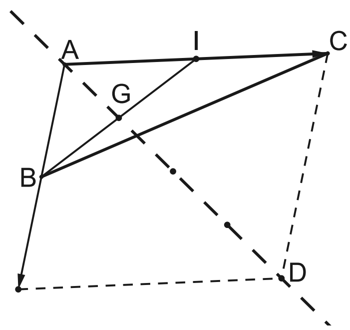
**B** **1. a)** $A(-1 ; -1)$ ; $B(1 ; -1)$ ; $C(1 ; 1)$ ; $D(-1 ; 1)$.

**b)** $M\left(-\dfrac{1}{4} ; 0\right)$ et $N\left(0 ; -\dfrac{1}{3}\right)$.

**2. a)** $\overrightarrow{DM}\left(\dfrac{3}{4} ; -1\right)$ et $\overrightarrow{DN}\left(1 ; -\dfrac{4}{3}\right)$ ; $\overrightarrow{DM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DN}$,
donc les points D, M, N sont alignés.

**b)** $\overrightarrow{AM}\left(\frac{3}{4}\,;1\right)$ et $\overrightarrow{CN}\left(-1\,;-\frac{4}{3}\right)$ ; $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$, donc les droites (AM) et (CN) sont parallèles.

**C** **1. a)** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}$.
Or $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. D'où le résultat.
**b)** $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ soit $\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GI}$.
Donc G est le milieu de [BI].
**2. a)**




**b)** $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AG}+(2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.
Or $2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$.
Donc $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$.
Les points A, D, G sont donc alignés.

**D** **1.** On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI})$ afin d'avoir, pour les points essentiels, des coordonnées simples.
**2. a)** $B(1\,;0)$, $I(0\,;1)$, $C(0\,;2)$ et $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
**b)** $\overrightarrow{CJ}\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{CK}(k\,;-2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires donc $-\frac{1}{2}\times 2-k\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ soit $k=\frac{2}{3}$
donc $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

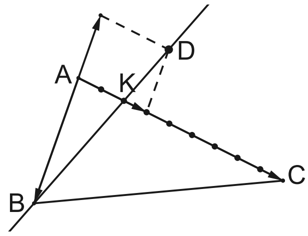
**E** **1.** $I\left(\frac{1}{3}\,;0\right)$, $K\left(0\,;\frac{3}{5}\right)$ et $J(x\,;y)$.
Donc : $\overrightarrow{AJ}(x\,;y-1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;-1)$.
$4\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 4x=1$ et $4y-4=-1$.
Donc $J\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.
**2.** (AI) a pour équation $\dfrac{x}{\frac{1}{3}}+y-1=0$ soit $3x+y-1=0$.

(CK) a pour équation $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{\frac{3}{5}}-1=0$ soit $x+\frac{5}{3}y-1=0$ ou $3x+5y-3=0$.
Les coordonnées $(x\,;y)$ de M, intersection de ces deux droites, vérifient :

$$\begin{cases}3x+y-1=0\\3x+5y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y-2=0\\3x+y-1=0\end{cases}$$

soit $M\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{2}\right)$.
La droite (BJ) a pour équation $y=3x$.
Les coordonnées de M vérifient cette équation donc B, M, J sont alignés et les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

**F** **1.**

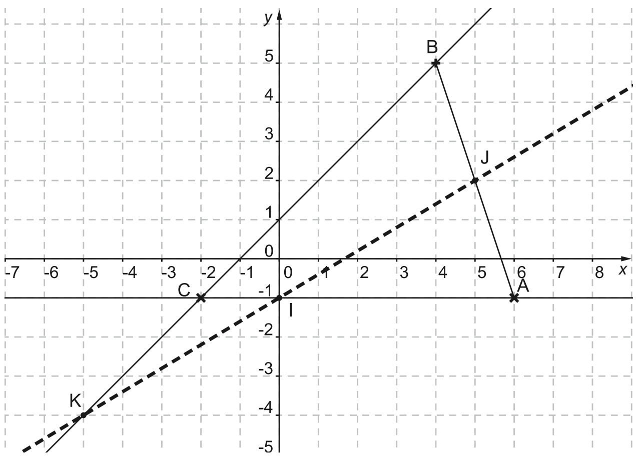



**2. a)** $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ;
donc dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ : $D\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$.
**b)** $K(0\,;y)$ ; $\overrightarrow{BK}(-1\,;y)$ et $\overrightarrow{BD}\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$.

Les points B, K, D sont alignés donc $(-1)\left(\frac{1}{3}\right)-y\left(-\frac{3}{2}\right)=0$,

soit $-\frac{1}{3}=-\frac{3}{2}y$ et $y=\frac{2}{9}$, donc $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$.

**G** $I(0\,;-1)$, $J(5\,;2)$ et $K(-5\,;y)$.
$\overrightarrow{BC}(-6\,;-6)$ et $\overrightarrow{BK}(-9\,;y-5)$.




Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires donc :
$-6(y-5)-(-6)(-9)=0$ soit $y-5=-9$ soit $y=-4$.
Donc : $K(-5\,;-4)$.
Ainsi, $\overrightarrow{IJ}(5\,;3)$ et $\overrightarrow{IK}(-5\,;-3)$ ;
donc $\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{IK}$ et les points I, J, K sont alignés.