CHAPITRE 6

Comportement d'une suite

ACTIVITÉS (page 143)

Activité 1

1 L'aire ajoutée (celle d'un carré) compense exactement l'aire enlevée.

2 a) $p_1 = 4 \times 4 = 16 = 2^4$;
$p_2 = 4 \times 4 \times 2 = 32 = 2^5$;
$p_3 = 4 \times 4 \times 2 \times 2 = 64 = 2^6$.
b) La suite (p_n) est géométrique de raison 2 car la longueur de la ligne brisée est le double de celle du segment initial.
Pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 2^{n+3}$.
c) Oui, car $p_n \geqslant 1\,500$ pour $n \geqslant 8$.
Oui, car $p_n \geqslant 10\,000$ pour $n \geqslant 11$.

3 Par construction, à partir de la figure 2, on augmente la « largeur » du quart de l'augmentation précédente :
$\ell_1 = 4$, $\ell_2 = 4 + 2$, $\ell_3 = 4 + 2 + \frac{1}{2}$, $\ell_4 = 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$,
et pour tout entier n ($n \geqslant 3$),
$$\ell_n = 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2 \times 4^{n-3}}$$
$$\ell_n = 6 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{n-3}}\right)$$
$$\ell_n = 6 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n-2}}}{1 - \frac{1}{4}} < 6 + \frac{2}{3} < 7.$$
Conclusion : la « largeur » ne peut pas dépasser 7 cm.

Activité 2

1 La surface coloriée est intérieure au triangle équilatéral du départ : son aire ne dépasse pas $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

2 $p_1 = 3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$;
$p_2 = 3 \times \frac{5}{2} + 3 \times 3 \times \frac{5}{4} = \frac{75}{4}$;
$$p_3 = 3 \times \frac{5}{2} + 9 \times \frac{5}{4} + 9 \times 3 \times \frac{5}{8}$$
$$= 3 \times \frac{5}{2} + 9 \times \frac{5}{4} + 27 \times \frac{5}{8} = \frac{285}{8}.$$
On peut conjecturer que :
$$p_n = 5 \times \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$$
$$p_n = \frac{15}{2}\left[1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{15}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}}$$
$$p_n = 15 \times \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right].$$
$$p_n \geqslant 1\,500 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 101.$$
Or, la suite géométrique des puissances de $\frac{3}{2}$ est croissante ($q > 1$) et avec une calculatrice, $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}7$.
Il est donc possible d'obtenir une surface coloriée dont le périmètre est supérieur à 15 m.

Activité 3

1 b) $\Omega(6 ; 6)$.
d) $B\left(1 ; \frac{7}{2}\right)$, $C\left(\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right)$, $D\left(\frac{7}{2} ; \frac{19}{4}\right)$, $E\left(\frac{19}{4} ; \frac{19}{4}\right)$, $F\left(\frac{19}{4} ; \frac{43}{8}\right)$, $G\left(\frac{43}{8} ; \frac{43}{8}\right)$, $H\left(\frac{43}{8} ; \frac{91}{16}\right)$, $I\left(\frac{91}{16} ; \frac{91}{16}\right)$.

2 On peut conjecturer que les termes de la suite sont de plus en plus « grands » mais qu'ils ne dépassent jamais 6.

3 a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n$.
b) $u_n < 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u_n > -3$
$\Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2}u_n > 0$, soit $u_{n+1} - u_n > 0$.
c) Pour tout entier naturel n, le terme de rang $n + 1$ est strictement supérieur au terme précédent.

PROBLÈME OUVERT

Boris a choisi au départ le nombre 20.

Les trois suites sont définies par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Antoine est parti d'un nombre strictement inférieur à 20, Boris est parti d'un nombre strictement supérieur à 20.

On peut visualiser cela en traçant, comme dans l'activité 3, les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 10$, sécantes au point $\Omega(20\,;20)$.

EXERCICES Application (page 149)

1 **a)** La fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

2 **a)** Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n = -n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Remarque : $u_0 = u_1 = 2$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3 **a)** Pour tout entier naturel n,

$u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$:

la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = 2n - 9$.

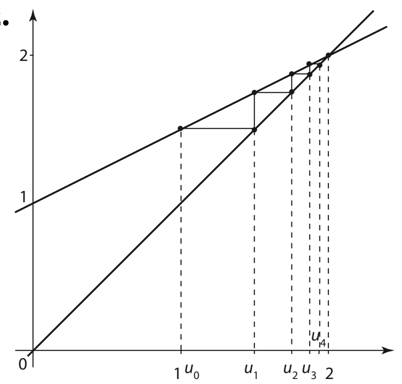
$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow n \geqslant 5$; donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 5.

Remarque : la fonction $x \mapsto (x-5)^2$ est strictement croissante sur $[5\,;+\infty[$.

4 Pour tout entier naturel n non nul,

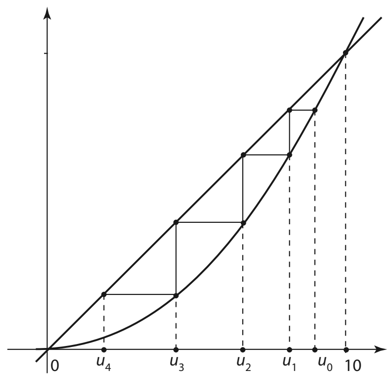
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n}{n+1} > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante.

5 **1.** et **2.**



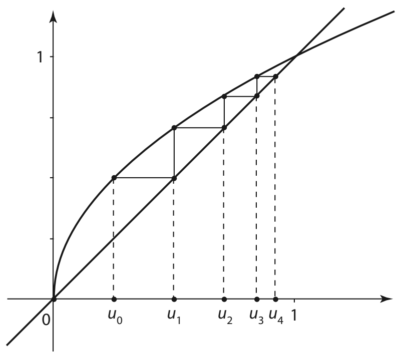
3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

6 **1.** et **2.**



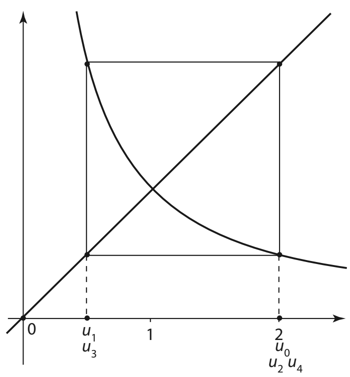
3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

7 **1.** et **2.**



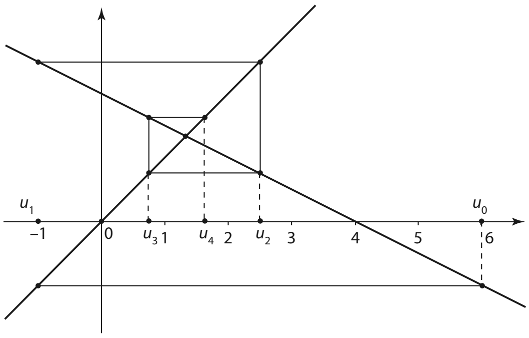
3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

8 **1.** et **2.**



3. La suite prend alternativement les valeurs 2 et $\frac{1}{2}$. Elle n'est pas monotone.

9 **1.** et **2.**



3. La suite (u_n) n'est pas monotone. On peut cependant conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \approx 1{,}33$.

10 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 10^4 \Leftrightarrow n > 10^8$, soit $m = 10^8$.

11 $\dfrac{1}{n+5} < 10^{-5} \Leftrightarrow n + 5 > 10^5$, soit $m = 99\,995$.

12 $\dfrac{2}{n^2} < 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 > 2 \times 10^6$

$\Leftrightarrow n > 1\,000\sqrt{3}$, soit $m = 1\,415$.

13 $-10^{-4} < \dfrac{-5}{2n+1} < 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{5}{2n+1} < 10^{-4}$

$\Leftrightarrow 5 \times 10^4 < 2n + 1$,

soit $m = 25\,000$.

14 $-10^{-6} < -\dfrac{1}{3^n} < 10^{-6} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{3^n} < 10^{-6} \Leftrightarrow 3^n > 10^6$,

soit, avec une calculatrice, $m = 13$.

15 $3 - 10^{-4} < 3 + \dfrac{1}{n} < 3 + 10^{-4} \Leftrightarrow -10^{-4} < \dfrac{1}{n} < 10^{-4}$

$\Leftrightarrow n > 10^4$,

soit $m = 10\,000$.

16 Considérons la suite des aires en cm^2 :

$u_1 = 25$, $u_2 = \dfrac{25}{4}$, $u_3 = \dfrac{25}{16}$ …

Par construction, (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = 25$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{25}{4^{n-1}}$.

$u_n < 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{25}{4^{n-1}} < 0{,}01 \Leftrightarrow 4^{n-1} > 2\,500$.

Avec une calculatrice : $4^5 = 1\,024$ et $4^6 = 4\,096$.

D'où $m = 7$.

L'aire du carré est alors égale, en cm^2, à $\dfrac{25}{4^6}$ et le côté mesure $\sqrt{\dfrac{25}{4^6}}$ soit $\dfrac{5}{4^3} \approx 0{,}078$ cm.

17 **1. a)** Pour tout entier $n \geqslant 3$, $2 - n \leqslant -1$ donc $u_n < 0$.

b) $u_n = f(n)$ où f est la fonction affine strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$.

La suite (u_n) est donc (strictement) décroissante.

2. a) $u_m \leqslant -10^5 \Leftrightarrow 2 - m \leqslant -3 \times 10^5$

$\Leftrightarrow m \geqslant 2 + 3 \times 10^5$.

Le plus petit entier naturel m tel que $u_m \leqslant -10^5$ est donc $300\,002$.

b) La suite étant décroissante, pour tout $n \geqslant 300\,002$, $u_n \leqslant u_m \leqslant -10^5$ et $u_n \in\,]-\infty\,; -10^5[$.

3. $u_m \leqslant \mathrm{A} \Leftrightarrow 2 - m \leqslant 3\mathrm{A} \Leftrightarrow m \geqslant 2 - 3\mathrm{A}$.

Quel que soit le nombre A, on trouve un indice m à partir duquel, la suite étant décroissante, tous les termes sont inférieurs à A : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

18 **a)** La fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: (u_n) est strictement croissante.

Les termes de la suite sont clairement positifs.

$u_n \geqslant 10^6 \Leftrightarrow n^2 \geqslant \dfrac{3}{2} \times 10^6 \Leftrightarrow n \geqslant 1\,000\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Or $1\,000\sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 1\,224{,}7$; donc $m = 1\,225$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1\,225$, $u_n \in \mathrm{I}$.

b) Pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5}{2} > 1$: la suite est strictement croissante.

$u_n \geqslant 10^5 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^n \geqslant 2 \times 10^5$.

Avec une calculatrice : $2{,}5^{13} \approx 149\,011$ et $2{,}5^{14} \approx 372\,529$; donc, à partir de l'indice $m = 14$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I.

19 **1.** Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = -2 \times 5^n(5 - 1) < 0$: la suite est strictement décroissante.

2. $u_n \leqslant -10^6 \Leftrightarrow 2 \times 5^n \geqslant 10^6 \Leftrightarrow 5^n \geqslant 500\,000$.

Avec une calculatrice : $5^8 = 390\,625$ et $5^9 = 1\,953\,125$; donc, à partir de l'indice $m = 9$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I.

EXERCICES Activités de recherche (page 154)

24 **Étude d'une suite définie par récurrence**

• ***Les outils :***

– Représentation de fonctions affines.

– Propriétés des suites géométriques.

– Sens de variation d'une suite.

• ***Les objectifs :***

– Savoir visualiser une suite.

– Utiliser une suite géométrique pour étudier le comportement d'une suite.

– Vérifier une accumulation.

1. a) $v_0 = u_0 - 2 = 2$.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$:

la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) La raison $\frac{1}{2}$ est strictement comprise entre 0 et 1 :

la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. a) Pour tout entier naturel n,

$u_n = v_n + 2$ et $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$, donc $u_n > 2$.

c) $2 < u_n < 2{,}0001 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 10^4$.

Avec une calculatrice : $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$;

d'où $m = 15$.

25 Étude d'une ligne brisée

• ***Les outils :***

– Propriétés d'un triangle équilatéral.

– Propriétés des suites géométriques.

– Somme des premiers termes d'une suite géométrique.

• ***L'objectif :***

– Savoir étudier le comportement d'une somme.

1. a) Tous les triangles sont rectangles avec un angle aigu de mesure $\frac{\pi}{3}$: ce sont des demi-triangles équilatéraux.

$d_1 = 2\sqrt{3}$, $d_2 = \sqrt{3}$.

b) $OA_1 = \frac{1}{2}OA_0$, $OA_2 = \frac{1}{2}OA_1$, ...

et $A_0A_1 = OA_0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1A_2 = OA_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}A_0A_1$.

Par construction, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$:

la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) $d_0 = 2\sqrt{3}$ et pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}$.

2. a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = d_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

b) $u_n = d_0\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = d_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

3. a) Pour tout entier naturel n, $u_n = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2^{n-2}} > 4\sqrt{3}$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$:

on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4\sqrt{3}$, c'est-à-dire $2A_0A_1$…

26 Narration de recherche

Le calcul des premiers termes permet de conjecturer que la suite (u_n) est la suite des entiers naturels à partir de 3.

Preuve :

Considérons la somme $s_n = 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$.

$s_n = (1 + 2) + (1 + 2 \times 2) + (1 + 3 \times 2) + \ldots + (1 + n \times 2)$

$s_n = n + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + 2n$.

D'où, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{s_n}{n} = n + 2$.

La suite est clairement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

27 Narration de recherche

Pour tout entier n, $u_n = \frac{(1+n)}{(1+n) + n^2(1+n)} = \frac{1}{1+n^2}$.

D'où, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + n^2}{1 + (n+1)^2} < 1$:

la suite (u_n) est strictement décroissante.

On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour confirmation : $u_n < 10^{-6} \Leftrightarrow 1 + n^2 > 10^6$,

donc $u_n < 10^{-6}$ dès que $n > 10^3$.

De la même manière, pour tout nombre A ($A \geqslant 0$…),

$0 < u_n < \frac{1}{A}$ dès que n dépasse $\sqrt{A}$.

28 TP – Une approche du nombre d'or

1. a) $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13$, $u_7 = 21$, $u_8 = 34$, $u_9 = 55$, $u_{10} = 89$.

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $v_0 = \frac{u_1}{u_0} = 1$, $v_1 = \frac{u_2}{u_1} = 2$, $v_2 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2}$, $v_3 = \frac{5}{3}$, $v_4 = \frac{8}{5}$,

$v_5 = \frac{13}{8}$, $v_6 = \frac{21}{13}$, $v_7 = \frac{34}{21}$, $v_8 = \frac{55}{34}$, $v_9 = \frac{89}{55}$.

b) On peut conjecturer que la suite (v_n) n'est pas monotone et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L \approx 1{,}618$.

4. a)

i	*a*	*b*	*c*	*v*
	1	1		
1	1	2	2	2
2	2	3	3	$\frac{3}{2}$
3	3	5	5	$\frac{5}{3}$

$a + b \to c$: u_{n+1} est remplacé par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

$b \to c$: u_n est remplacé par u_{n+1}

$\frac{b}{a} \to v$: v_n est remplacé par $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$

29 TP – Au voisinage de la limite

a) À la ligne 7, u_0 prend la valeur 1.

b) C'est la fonction qui permet de « passer » de u_n à u_{n+1} car $f(u_n) = u_{n+1}$.

c) La boucle fonctionne tant que $u \notin I =]L - r ; L + r[$.

Elle s'arrête dès que $u \in I$.

d) L13 : c'est le passage de u_n à u_{n+1} :

L14 : on incrémente l'indice n (il devient $n + 1$).

e) • $I =]2{,}99 ; 3{,}01[$, soit $r = 0{,}01$. Les termes de la suite appartiennent à I à partir de l'indice 14.

• $I =]2{,}9998 ; 3{,}0002[$, soit $r = 0{,}0002$. Les termes de la suite appartiennent à I à partir de l'indice 23.

• $I =]3 - 10^{-6} ; 3 + 10^{-6}[$, soit $r = 10^{-6}$. Les termes de la suite appartiennent à I à partir de l'indice 36.

f) On remplace la ligne 22 par $F_1(x) = \frac{x}{2} + 2$ et on saisit $L = 4$.

DE TÊTE

30 $u_0 = 5$, $u_1 = 6$, $u_2 = 7$, $u_3 = 8$, $u_4 = 9$,…
On conjecture que la suite est strictement croissante.
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = x + 5$: f est affine strictement croissante, il en est de même pour la suite (u_n).

31 $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -3$, $u_3 = -5$, $u_4 = -7$,…
On conjecture que la suite est strictement décroissante.
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = -x + 1$: f est affine strictement décroissante, il en est de même pour la suite (u_n).

32 $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{6}$, $u_4 = \frac{1}{8}$,…
On conjecture que la suite est strictement décroissante.
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2x}$.
Sur $]0\,;+\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$: f est strictement décroissante, il en est de même pour la suite (u_n).

33 Deux termes consécutifs sont de signes contraires (et non nuls) : la suite n'est pas monotone.

34 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

35 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

36 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

37 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

38 $u_{201} = \frac{1}{1\,005}$, $u_{201} \in \mathrm{I}$.

39 $u_{100} = 10\,100$, $u_{100} \in \mathrm{I}$.

SENS DE VARIATION

40 *Corrigé dans le manuel.*

41 $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 10(n+1) + 26 - n^2 + 10n - 26$
$= 2n + 1 - 10 = 2n - 9$.
Pour $n \geqslant 5$, $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

42 **1.** $f'(x) = 6x^2 - 60x + 54 = 6(x-9)(x-1)$

x	0		1		9		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

2. f est strictement croissante sur $[9\,;+\infty[$: la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 9.

43 **1.** $f'(x) = \frac{-4}{x^3} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

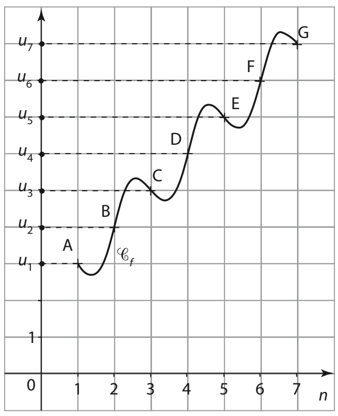
2. La suite (u_n) est strictement décroissante.

44 **1.** $u_1 = 1{,}1$; $u_2 = 0{,}325$; $u_3 \approx 0{,}147\,88$; … ;
$u_4 = 0{,}091\,506\,25$. Le calcul des premiers termes fait penser que la suite est strictement décroissante.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1{,}1^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1{,}1^n}{n^2} = 1{,}1^n\left[\frac{1{,}1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right]$
$= \frac{1{,}1^n}{n^2(n+1)^2}(0{,}1n^2 - 2n - 1)$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est du signe du trinôme $0{,}1n^2 - 2n - 1$.
$\Delta = 4{,}4$; le trinôme admet donc deux racines :
$n_1 = \frac{2 - \sqrt{4{,}4}}{0{,}2} < 0$ et $n_2 = \frac{2 + \sqrt{4{,}4}}{0{,}2} \approx 20{,}5$.
Le trinôme est strictement positif pour $n \geqslant 21$: la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 21.

45 **1.** Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.

2.



La suite (u_n) est strictement croissante et f n'est pas monotone.

46 **1.** La suite semble tendre vers 1.
2. De même, la suite semble tendre vers 1.

47 **1.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = n + 1 > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{n(n+1)}{2} > 2011 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 4\,022 > 0$.
Le trinôme $n^2 + 2n - 4\,022$ admet deux racines, $n_1 < 0$ et $n_2 \approx 62{,}9$; il est donc strictement positif pour $n \geqslant 63$.
Il existe donc bien des termes de la suite supérieurs à 2011 : tous ceux d'indice supérieur ou égal à 63.
De même : $n^2 + n > 2\,000\,000 \Leftrightarrow n \geqslant 1\,414$.

48

```
▼ VARIABLES
  ├─n EST_DU_TYPE NOMBRE
  └─h EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├─h PREND_LA_VALEUR 200
  ├─n PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ TANT_QUE (h>=10) FAIRE
    ├─DEBUT_TANT_QUE
    ├─n PREND_LA_VALEUR n+1
    ├─h PREND_LA_VALEUR 0.9*h
    └─FIN_TANT_QUE
  └─AFFICHER n
└─FIN_ALGORITHME
```

49 Faux : $1{,}999\,999 < u_{1001} < 2$.

50 **1.** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2$.
f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2. $v_n = g(n)$ avec $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.
La fonction g est définie est dérivable sur $]-3\,;+\infty[= \mathrm{I}$.
$g'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2} > 0$ donc g est strictement croissante sur I et la suite (v_n) est strictement croissante.

51 $m = 8\,165$.

52 $m = 31$.

53 $m = 5\,002$.

54 $m = 5 \times 10^7$.

55 $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. La fonction f est définie est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ donc sur $\mathrm{I} =]0\,;2]$.
$f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0$ sur I, donc f est strictement décroissante sur I, et la suite (u_n) est strictement décroissante.
Pour tout naturel n, $u_n > 0$ et $u_n < u_0 = 2$, donc $u_n \in]0\,;2]$.

56 $u_n = -3 + \dfrac{1}{n^2}$, soit $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -3 + \dfrac{1}{x^2}$.
La fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. La suite (u_n) est strictement décroissante.
Pour tout entier naturel n, $u_n > -3$ et $u_n \leqslant u_1 = -2$, donc $u_n \in]-3\,;-2]$.

57 *Corrigé dans le manuel.*

58 **1.** $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $v_3 = 9$, $v_4 = 16$.
$w_0 = 0$, $w_1 = 10$, $w_2 = 20$, $w_3 = 30$, $w_4 = 40$.
On conjecture la stricte croissance de ces deux suites, qui résulte de la stricte croissance, sur $[0\,;+\infty[$, des deux fonctions associées, la fonction *carré* $x \mapsto x^2$ et la fonction linéaire $x \mapsto 10x$.
2. $v_n > 10\,000 \Leftrightarrow n > 100$; $\mathrm{N}_1 = 100$.
$w_n > 10\,000 \Leftrightarrow n > 1\,000$; $\mathrm{N}_2 = 1\,000$.
3. $v_n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n > 1\,000$; $\mathrm{N}'_1 = 1\,000$.
$w_n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n > 100\,000$; $\mathrm{N}'_2 = 100\,000$.
$\mathrm{N}'_1 < \mathrm{N}'_2$: c'est encore vrai.
$v_n > 10^p \Leftrightarrow n^2 > 10^p$; $\mathrm{N}_1 = \sqrt{10^p}$.
$w_n > 10^p \Leftrightarrow n > 10^{p-1}$; $\mathrm{N}_2 = 10^{p-1}$.
$\mathrm{N}_2 > \mathrm{N}_1 \Leftrightarrow 10^{p-1} > \sqrt{10^p} \Leftrightarrow 10^{2p-2} > 10^p \Leftrightarrow 10^{p-2} > 1$.
N_2 est donc toujours supérieur à N_1 pour $p > 2$.

59 **1.** $i_1 = 0{,}85 \times i_0$.
2. $i_5 = 0{,}85^5 \times i_0$.
3. $i_n = 0{,}85^n \times i_0$; $i_n < 0,\ 10 \times i_0 \Leftrightarrow 0{,}85^n < 0{,}10$.
Avec une calculatrice : $0{,}85^{14} \approx 0{,}103$ et $0{,}85^{15} \approx 0{,}087$, donc on doit placer au moins 15 plaques.

60 **1.** $1 - \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1\,023}{1\,024}$; $1 - \dfrac{1}{2^{15}} = \dfrac{32\,767}{32\,768}$.
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
3. $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} - 1 + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.
4. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2n} > 0$ donc $u_n < 1$.
5. $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{10^6} \Leftrightarrow 2^n > 10^6$.
Avec une calculatrice, on obtient $n \geqslant 20$.

61 **1.** $u_2 = 0{,}95 \times u_1$.
2. La suite (u_n) est géométrique de premier terme 100 000 et de raison 0,95.
3. $0{,}95^n \times 100\,000 < 50\,000 \Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}5$.
Avec une calculatrice : $0{,}95^{13} \approx 0{,}51$ et $0{,}95^{14} \approx 0{,}48$; donc en 2014, la population sera, pour la première fois, inférieure à 50 000 habitants.

62 *Corrigé dans le manuel.*

63 **1. a)** La suite (P_n) est arithmétique car la production augmente régulièrement d'une même quantité.
b) $\mathrm{P}_6 = \mathrm{P}_1 + 5r = 14\,000$
$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_6 = 3(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_6) = 66\,000$,
donc $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_6 = 22\,000$ et $\mathrm{P}_1 = 8\,000$ et $r = 1\,200$.
c) $\mathrm{P}_n \geqslant 2\mathrm{P}_1 \Leftrightarrow 8\,000 + (n-1) \times 1\,200 \geqslant 2 \times 8\,000$
$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant \dfrac{20}{3}$
donc au bout de 8 années.
2. a) $\mathrm{Q}_5 = \mathrm{Q}_1 \times 1{,}1^4 = 73\,205$.
b) $\mathrm{Q}_n \geqslant 2\mathrm{Q}_1 \Leftrightarrow 1{,}1^{n-1} \geqslant 2 \Leftrightarrow n - 1 \geqslant 8$,
donc au bout de 9 années.

64 *Corrigé dans le manuel.*

65 **1.** $d_n = \dfrac{d_0}{2^n}$.
2. $d_n < \dfrac{1}{100} d_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 2^n > 100 \Leftrightarrow n \geqslant 7$.
Donc 7 heures sont nécessaires à l'élimination de 99 % du médicament.

66 **1.** $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{2}{3}$, $u_4 = \dfrac{3}{4}$.
2. On peut conjecturer que :
pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n-1}{n}$
3. $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{n-1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)-1}{n+1}$.
La conjecture est vraie pour le rang suivant.

AVEC LES TICE

67 **1. b)** La suite (u_n) semble strictement croissante.
c) u_n est de la forme $1 + n \times 0{,}001$.
2. a) Les termes sont strictement positifs.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}001 > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante.
b) $v_n = 1 + \dfrac{n}{1\,000}$.
4. $1{,}004^{15} \approx 1 + 15 \times 0{,}004 = 1{,}06$.

ROC Restitution organisée de connaissances

68 **1.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} > 0.$

Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc :

si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) Si pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour tout entier naturel n,

$v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+3}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+2}} = \frac{2}{3} < 1$:

la suite (v_n) est strictement décroissante.

Prendre toutes les initiatives

69 Le calcul des premiers termes semble montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n}.2$

Remarquons (raisonnement par récurrence en Terminale) que si $u_n = \frac{1}{n}$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

70 **1.** $90\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{19}}\right) = 90 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{20}}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= 135\left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right).$

2. Non, car la somme $135\left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right)$ est inférieure à 135.

EXERCICES Approfondissement (page 162)

71 **1.** Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

2.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Choisissez l'entier p tel que r = 1/10^p"
  LIRE p
  n PREND_LA_VALEUR 0
  r PREND_LA_VALEUR 1/pow(10,p)
  d PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (d>r) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    d PREND_LA_VALEUR 1/pow(2,n)
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  n PREND_LA_VALEUR n-1
  AFFICHER "(1/2)^"
  AFFICHER n
  AFFICHER " < 1/10^"
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

72 **1.** $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{5}{3}$, $u_3 = 2$, $u_4 = \frac{11}{5}$.

$v_0 = 1$, $v_1 = \frac{5}{3}$, $u_2 = \frac{19}{9}$, $u_3 = \frac{65}{27}$, $u_4 = \frac{211}{81}$.

La lecture des premiers termes permet de conjecturer que les deux suites sont croissantes.

2. a) $\mathrm{U}_n = 3 - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{n+1}$.

b) $\mathrm{V}_{n+1} = 3 - \frac{2}{3}v_n - 1 = \frac{2}{3}(3 - v_n) = \frac{2}{3}\mathrm{V}_n$.

La suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $\mathrm{V}_0 = 2$, donc pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

c) $\mathrm{U}_n \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow n + 1 \geqslant 4 \times 10^6$.

Le premier indice cherché est, pour la suite (U_n), 4 000 001.

$\mathrm{V}_n \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^n} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow 1{,}5^n \geqslant 2\,000\,000$.

Avec une calculatrice : $1{,}5^{35} \approx 1\,456\,109$ et $1{,}5^{36} \approx 2\,184\,164$, donc le premier indice cherché est, pour la suite (V_n), 36.

d) Avec 10^{-10}, on trouve 40 000 000 001 pour la suite (U_n) et 59 pour la suite (V_n). On peut conjecturer que les termes de la suite (V_n) « s'approchent » beaucoup plus vite de la limite 3 que ceux de la suite (U_n).

73 **1.** $u_1 = -\frac{1}{3}$, $u_2 = -5$, $u_3 = 2$.

2. $u_3 = u_0$, donc on peut conjecturer que la suite (u_n), qui n'est pas monotone, prend de manière cyclique les trois valeurs 2, $-\frac{1}{3}$ et -5 dans cet ordre.

3. $u_{n+3} = \frac{u_{n+2} - 3}{u_{n+2} + 1} = \frac{\frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} - 3}{\frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} + 1} = \frac{-2u_{n+1} - 6}{2u_{n+1} - 2}$

$u_{n+3} = -\frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 1} = -\frac{\frac{u_n - 3}{u_n + 1} + 3}{\frac{u_n - 3}{u_n + 1} - 1} = -\frac{4u_n}{-4} = u_n.$

Donc, $u_0 = u_3 = u_6 = \ldots\ u_{3n} = \ldots = 2$,

$u_1 = u_4 = u_7 = \ldots\ u_{3n+1} = \ldots = -\frac{1}{3}$,

$u_2 = u_5 = u_8 = \ldots\ u_{3n+2} = \ldots = -5$.

La suite (u_n) est dite périodique, de période 3.

74 **1.** $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$; la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} > 0$: la suite (v_n) est strictement croissante. D'autre part, la somme des aires coloriées en vert est inférieure à l'aire du triangle, donc pour tout entier naturel n, $v_n < 2$.

3. $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

$2 - v_n < 0{,}001 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{10^3} \Leftrightarrow 2^n > 10^3$ soit $n \geqslant 10$.

75 **1. a)** $u_{n+1} - u_n = 2^n - 40 \geqslant 0$ pour $n \geqslant 6$: la suite (u_n) est croissante à partir du rang 6.
b) $u_9 = 132$ et (u_n) est croissante à partir du rang 6.
Donc pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 9$, alors $u_n > 0$.
2. a) $v_{n+1} - v_n = 2^{n+1} - 20(n+1)^2 - 2^n + 20n^2 = 2^n - 40n - 20$, soit pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = u_n$.
b) Si $n \geqslant 9$, alors $u_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est strictement croissante à partir du rang 9.
c) $v_{11} = -372$ et $v_{12} = 1\,216$, et (v_n) est strictement croissante à partir du rang 9, donc, à partir du rang 12, $v_n > 0$.

76 **1. a)** $\mathrm{N}_1 = (1 - 0{,}012\,4)\,\mathrm{N}_0 = 0{,}987\,6\,\mathrm{N}_0$:
$\mathrm{N}_k = 0{,}987\,6\,\mathrm{N}_{k-1}$.
b) La suite (N_n) est géométrique de raison 0,987 6.
Pour tout naturel n, $\mathrm{N}_n = (0{,}987\,6)^n\,\mathrm{N}_0$.
c) Pour tout naturel n, N_n est strictement positif.
De plus, $\dfrac{\mathrm{N}_n}{\mathrm{N}_{n-1}} = 0{,}987\,6 < 1$: la suite (N_n) est strictement décroissante.
2. $(0{,}987\,6)^n \approx 0{,}40$. Avec une calculatrice :
$(0{,}987\,6)^{73} \approx 0{,}402$ et $(0{,}987\,6)^{74} \approx 0{,}397$.
La suite (N_n) étant strictement décroissante, les fragments ont entre 73 et 74 siècles.

77 **a)** $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1 \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.
b)

```
▼ VARIABLES
  ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ d EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ A EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ AFFICHER "Choisissez le nombre A"
  ├ LIRE A
  ├ n PREND_LA_VALEUR 0
  ├ d PREND_LA_VALEUR 1
  ▼ TANT_QUE (d<A) FAIRE
    ├ DEBUT_TANT_QUE
    ├ d PREND_LA_VALEUR pow(2,n)-n
    ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
    └ FIN_TANT_QUE
  ├ n PREND_LA_VALEUR n-1
  ├ AFFICHER "Le terme u"
  ├ AFFICHER n
  ├ AFFICHER " est le premier >= à "
  └ AFFICHER A
FIN_ALGORITHME
```

78 **1. b)** On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.
2. a) On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.
b) Les suites semblent toujours converger vers $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
3. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$.

79 **a)** Pour tout entier naturel p non nul, u_p et v_p sont strictement positifs.
$u_p > v_p \Leftrightarrow \dfrac{v_p}{u_p} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2p^2 + 5p}{p^2 + p + 1} < 1$.
Le trinôme $p^2 + p + 1$ est toujours strictement positif.
$u_p > v_p \Leftrightarrow p^2 + 4p - 1 < 0 \Leftrightarrow p \in \,]0\,;-2+\sqrt{5}[$.
Or cet intervalle ne contient pas de nombre entier ;
il n'existe pas de nombre m tel que : $\forall p \geqslant m$, $u_p > v_p$;
soit encore : pour tout entier naturel n non nul, $u_n < v_n$.

$$w_p > v_p \Leftrightarrow \frac{v_p}{w_p} < 1 \Leftrightarrow \frac{2p^2 + 5p}{p^2 + p + 1} < 3$$
$$\Leftrightarrow -p^2 + 2p - 3 < 0.$$

Le trinôme $-p^2 + 2p - 3$ est toujours strictement négatif ($\Delta < 0$ et $a < 0$).
Conclusion : Pour tout entier naturel p non nul,
$$u_p < v_p < w_p.$$
b) Les suites (u_n) et (w_n) ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut conjecturer qu'il en est de même pour la suite (v_n).

80 $\dfrac{n(n+1)}{2} = 10^p \Leftrightarrow n^2 + n - 2 \times 10^p = 0$.
Cette équation ne peut avoir des solutions entières que si $\Delta = 1 + 8 \times 10^p$ est le carré d'un nombre entier impair. Or parmi les nombres 1, 81, 801, 8 001, 80 001, 800 001, 8 000 001 et 80 000 001, seuls les deux premiers conviennent.
Les couples cherchés sont donc (1 ; 0) et (4 ; 1).

81 Le centre du cercle est aussi le centre de gravité et l'orthocentre de tous les triangles. Donc le premier (plus grand) triangle a pour hauteur 4,5 cm, pour côté $3\sqrt{3}$ cm et pour aire (en cm²) : $a_1 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.
La suite (a_n) des aires est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$; donc pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{4^{n-1}} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4^n}$.
Ainsi : $a_n \geqslant 0{,}001 \Leftrightarrow \dfrac{27\sqrt{3}}{4^n} \geqslant \dfrac{1}{10^3} \Leftrightarrow 4^n \leqslant 27\,000\sqrt{3}$.
Avec une calculatrice :
$27\,000\sqrt{3} \approx 46\,765{,}4^7 = 16\,384$ et $4^8 = 65\,536$.
Donc 7 triangles ont une aire supérieure à 0,1 mm².

EXERCICES Travail en autonomie (page 164)

A **1.** $u_1 = \frac{5}{3}$, $u_2 = \frac{17}{18}$, $u_3 = \frac{17}{27}$, $u_4 = \frac{145}{324}$.

2. a) $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{n} - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3} - 1\right)$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b) $u_{n+1} - u_n$ est clairement strictement négatif : la suite (u_n) est strictement décroissante.

B **2.** La suite semble croissante et de limite 4.

C **1. a)** $f'(x) = \frac{6x(x^2+3) - 2x(3x^2+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{16x}{(x^2+3)^2}$.

Sur $[0\,;+\infty[$, f' est strictement positive sauf en 0 où elle s'annule.

f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) Il en résulte que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) Pour tout entier naturel n, $u_n - 3 = \frac{-8}{n^2+3}$,

donc $u_n - 3 < 0$ et $u_n < 3$.

b) $$u_n > 2{,}9999 \Leftrightarrow u_n - 3 > -0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow \frac{-8}{n^2+3} > -0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 3 > 80\,000$$
$$\Leftrightarrow n^2 > 79\,997$$
$$\Leftrightarrow n > \sqrt{79\,997}.$$

$m = 283$.

D **1. a)** $c_n = 4 \times \frac{1}{2^{n-1}}$.

$$\ell_n = 4\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 4 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

b) $\forall n \geqslant 1$, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 1$ donc $\ell_n < 8$.

2. $8 - \ell_n = \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}}$.

$8 - \ell_n < 10^{-5} \Leftrightarrow 2^{n-3} > 10^5$.

Avec une calculatrice : $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$;

donc $m - 3 = 14$ soit $m = 17$.

E **1. a)** $\forall x \geqslant 1$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$.

b) $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ donc $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$.

2. a) $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

b) $\forall n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} < 1$:

la suite est strictement décroissante.

3. a) $$\ell_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b) $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+1} > 0$ donc $\ell_n < 1$.

c) $$1 - 10^{-4} < \ell_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^4}$$
$$\Leftrightarrow n + 1 > 10^4\,;$$

donc $m = 10\,002$.