CHAPITRE 5

Suites. Suites arithmétiques. Suites géométriques

ACTIVITÉS (page 118)

Activité 1

1 **a)** 158 – 142 + 1 = 17 coureurs.

b) $x - 159 + 1 = 20$ d'où $x = 178$. L'équipe a reçu les dossards numérotés de 159 à 178.

2 $x - 12 + 1 = 35$ d'où $x = 46$.

3 2022 – 2011 + 1 = 12 années.

4 **a)** 12 intervalles, 13 multiples de 5.

b) Le plus petit multiple de 5 est 145, le plus grand 215. Ils sont « distants » de 70 donc 14 intervalles et 15 multiples de 5.

5 84 – 26 = 58, donc 29 intervalles de longueur 2, soit 30 numéros.

Activité 2

2

d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{5}{256}$

3 Pour tout entier n, $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$.

Activité 3

4 La cellule A2011 contient le nombre 4021.

5 A6 = A5 + 2, et pour tout n, $A_{n+1} = A_n + 2$.

6 Les différences entre deux cellules consécutives sont constantes.

PROBLÈME OUVERT

Figure 8 : 36 points ;
Figure 17 : 153 points ;
Figure 2011 : 2023066 points.

EXERCICES Application (page 123)

1 **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - 2n - 3 = 2$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

b) $u_1 - u_0 = 0 \neq u_2 - u_1 = 2$: la suite n'est pas arithmétique.

2 **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2}$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

b) $u_1 - u_0 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \neq u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$: la suite n'est pas arithmétique.

3 **a)** $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \neq u_2 - u_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$: la suite n'est pas arithmétique.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -2.

4 $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: la suite n'est pas arithmétique.

5 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1 = 7$ et de raison 7.

6 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -3$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison -3.

7 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+4}}{5^{n+3}} = 5$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 125$ et de raison 5.
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3^{n+2}} \times \dfrac{3^{n+1}}{2} = \dfrac{1}{3}$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

8 **a)** $u_0 = \dfrac{5}{3}$, $u_1 = \dfrac{7}{3}$, $u_2 = \dfrac{9}{3}$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{7}{5} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{9}{7}$: la suite n'est pas géométrique.
En revanche, elle est arithmétique…
b) $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 15$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = 6 \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{2}$: la suite n'est pas géométrique.

9 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 4$. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 4.
b) $u_0 = -1$, $u_1 = -\dfrac{1}{5}$, $u_2 = \dfrac{3}{25}$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{5} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{3}{5}$: la suite n'est pas géométrique.

10 $u_0 = 4$, $u_1 = 5$, $u_2 = 7$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{4} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{7}{5}$: la suite n'est pas géométrique.
En revanche, elle est arithmétique…

11 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 2u_n - 10 = 2v_n$.
$v_0 = u_0 - 5 = -2$.
La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -2$ et de raison 2.

12 $u_{10} - u_0 = 10r = 30$ donc $r = 3$.
$u_{2011} = u_0 + 2\,011 \times r = 1 + 2\,011 \times 3 = 6\,034$.

13 $u_{100} - u_0 = 100r = -50$ donc $r = -\dfrac{1}{2}$.
$u_{20} = u_0 + 20 \times r = 5 + 20 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -5$.
$u_{200} = u_0 + 200 \times r = 5 + 200 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -95$.

14 $u_{40} - u_{17} = 23r = 46$ donc $r = 2$.
$u_{10} = u_{17} - 7r = 24 - 7 \times 2 = 10$.
$u_{20} = u_{17} + 3r = 24 + 6 = 30$.

15 $u_{10000} - u_{2000} = 8\,000\,r = 80$, donc $r = \dfrac{1}{100}$.
$u_{3857} = u_{2000} + 1\,857r = -79 + 18{,}57 = -60{,}43$.
$u_{5000} = u_{2000} + 3\,000r = -79 + 30 = -49$.

16 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 5^n$.
$u_5 = 4 \times 5^5 = 12\,500$ et $u_8 = 4 \times 5^8 = 1\,562\,500$.

17 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-2)^n}{3}$.
$u_4 = \dfrac{(-2)^4}{3} = \dfrac{16}{3}$ et $u_9 = \dfrac{(-2)^9}{3} = -\dfrac{512}{3}$.

18 $\dfrac{u_5}{u_3} = q^{5-3} = 1{,}2^2$ donc $u_3 = \dfrac{8{,}64}{1{,}44} = 6$.
$u_{10} = u_5 \times 1{,}2^{10-5} = 8{,}64 \times 1{,}2^5 = 21{,}499\,084\,8$.

19 $u_{100} - u_0 = 100r = -100$, donc $r = -1$.
$u_{20} = u_0 + 20 \times r = 5 - 20 = -15$.
$S = 21 \times \dfrac{u_0 + u_{20}}{2} = -105$.

20 $u_{40} - u_{17} = 23r = 46$, donc $r = 2$.
$u_{100} = u_{40} + 60r = 190$.
$S = 61 \times \dfrac{70 + 190}{2} = 7\,930$.

21 $S = 8\,001 \times \dfrac{-79 + 1}{2} = -312\,039$.

22 $S = 27 \times \dfrac{1}{3^2} + 27 \times \dfrac{1}{3^3} + \ldots + 27 \times \dfrac{1}{3^6}$

$$S = 27 \times \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right)$$

$$S = 3 \times \frac{1 - \dfrac{1}{3^5}}{1 - \dfrac{1}{3}} = 3 \times \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^5}\right) = \frac{121}{27}.$$

23 $t_{10} = 100$, $t_9 = 10$, …, $t_4 = \dfrac{100}{10^6} = \dfrac{1}{10^4}$ et $S = 111{,}111\,1$.

24 $a_1 = 16\pi$, $a_2 = \dfrac{16\pi}{4}$, $a_3 = \dfrac{16\pi}{4^2}$, …, $a_6 = \dfrac{16\pi}{4^5}$.

$$S = 16\pi\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^5}\right) = 16\pi \times \frac{1 - \dfrac{1}{4^6}}{1 - \dfrac{1}{4}}$$

$$S = \frac{\pi}{3} \times \frac{4^6 - 1}{4^3} = \frac{1\,365\pi}{64} \approx 21{,}33\ \pi.$$

Remarque : $16 + 4 + 1 + 0{,}25 + 0{,}062\,5 + 0{,}015\,625 = 21{,}328\,125\ldots$

EXERCICES Activités de recherche (page 128)

29 Calculer le nombre de termes

• Les outils :

– Propriétés des suites arithmétiques.
– Résolution d'une inéquation du second degré.
– Utilisation d'un algorithme.

• Les objectifs :

– Savoir traduire une situation par une équation, une inéquation, un algorithme.
– Savoir déterminer le signe d'un trinôme.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$S = N\,u_0 + [r + 2r + \ldots + (N-1)r]$
$\quad = N\,u_0 + r[1 + 2 + \ldots + (N-1)]$.

2. $S = N\,u_0 + r(N-1) \times \dfrac{N}{2} = 2N + \dfrac{5}{2}(N^2 - N) = \dfrac{5}{2}N^2 - \dfrac{1}{2}N$.

3. $\dfrac{5}{2}N^2 - \dfrac{1}{2}N > 750 \Leftrightarrow 5N^2 - N - 1\,500 > 0$.

Le trinôme $5N^2 - N - 1\,500$ admet deux racines ($\Delta = 30\,001$) :

$x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{30\,001}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{30\,001}}{10} \approx 17{,}4$.

D'où le tableau de variation :

N	0	x_2	$+\infty$
$5N^2 - N - 1\,500$	–	0	↗

Le plus petit nombre entier à partir duquel la somme dépasse 750 est donc 18.

4.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  U PREND_LA_VALEUR 2
  S PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (S<=750) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    U PREND_LA_VALEUR U+5
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    FIN_TANT_QUE
  n PREND_LA_VALEUR n+1
  AFFICHER "Le nombre de termes est N = "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

30 Une suite arithmétique

• Les outils :

– Propriétés des suites arithmétiques.
– Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

• Les objectifs :

– Savoir mettre un problème en équations.
– Savoir exploiter les propriétés des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1. $a = b - r$ et $c = b + r$.

2. $\begin{cases} (b-r) + b + (b+r) = 21 \\ (b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 197 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ 3b^2 + 2r^2 = 197 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ r^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ r = -5 \text{ ou } r = 5 \end{cases}$

Soit ($a = 12$ et $c = 2$) ou ($a = 2$ et $c = 12$).
Les nombres cherchés sont 2, 7 et 12.

31 Utiliser une suite auxiliaire

• L'outil :

– Propriétés des suites géométriques.

• Les objectifs :

– Savoir reconnaître une suite arithmétique ou géométrique.
– Savoir conjecturer un résultat et le démontrer.
– Savoir passer de la définition par récurrence à la définition explicite d'une suite.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: la suite n'est pas arithmétique.

$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$: la suite n'est pas géométrique.

2. a) $v_0 = \dfrac{1}{2}$, $v_1 = \dfrac{3}{2}$, $v_2 = \dfrac{9}{2}$, $v_3 = \dfrac{27}{2}$, $v_4 = \dfrac{81}{2}$.

b) On peut conjecturer que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison 3.

Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3u_n - 1 - \dfrac{1}{2} = 3u_n - \dfrac{3}{2} = 3v_n$.

$v_0 = u_0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3^n}{2}$.

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

32 Narration de recherche

Notons $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$u_{2011} = S_{2011} - S_{2010}$
$\quad = 3 \times 2011^2 + 5 \times 2011 - 3 \times 2010^2 - 5 \times 2010$
$\quad = 3 \times (2011^2 - 2010^2) + 5 \times (2011 - 2010)$
$\quad = 3 \times 1 \times 4021 - 5 = 12\,058$.

33 Narration de recherche

Les trois colonnes contiennent chacune les six premiers termes d'une suite dont le premier est 2.

La première suite pourrait être géométrique de raison 1,01 et son 7e terme 2,123 040 3.

La deuxième suite pourrait être arithmétique de raison 0,02 et son 7e terme 2,12.

En étudiant les différences successives, la troisième suite est définie par :

$u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{0{,}04}{2^n}$

et son 7e terme est 2,039 375.

34 **Narration de recherche**

a) Notons q la raison.

$b = aq$, $c = aq^2$ et $d = aq^3$.

Exprimons les aires en fonction de a et de q :

$a \times d = a \times aq^3 = a^2q^3$ et $b \times c = aq \times aq^2 = a^2q^3$.

Les deux aires sont égales.

b) Notons r la raison.

$b = a + r$, $c = a + 2r$ et $d = a + 3r$.

• Pour les périmètres :

$2(a + d) = 2(2a + 3r) = 4a + 6r$;

$2(b + c) = 2(2a + 3r) = 4a + 6r$.

Les deux périmètres sont égaux.

• Pour les aires :

$a \times d = a \times (a + 3r) = a^2 + 3ar$;

$b \times c = (a + r) \times (a + 2r) = a^2 + 3ar + 5r^2$.

Les deux aires diffèrent de $5r^2$. On peut remarquer que cette différence est indépendante des termes choisis dans la suite.

35 **TP – Étude graphique d'une suite définie par récurrence**

2. a) Les différences entre deux termes consécutifs ne semblent pas constantes : on peut conjecturer que la suite n'est pas arithmétique et ceci quel que soit u_0.

b) Les deux droites sont parallèles et la suite semble être arithmétique.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$: la suite est bien arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, c'est-à-dire la suite des entiers naturels non nuls.

Avec $a = 1$, b représente la raison car alors $u_{n+1} = u_n + b$.

c) La suite semble géométrique de raison a.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\, u_n$.

Cela reste vrai pour $a < 0$, la suite est alors « alternée ».

36 **TP – Évaluer le terme d'indice n**

3. $u_{10} \approx 9{,}991\,210$; $v_{100} = 2$.

EXERCICES Entraînement (page 132)

DE TÊTE

37 $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 5$, $u_5 = 11$.

38 $u_1 = -1{,}5$, $u_2 = -3{,}75$

39 $25 - 12 = 13 = 38 - 25$: oui, les trois nombres peuvent être trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 13.

$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$: non, les trois nombres ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

40 $u_0 = -4$ et $u_{10} = 16$.

41 $u_0 = 14$ et $u_{14} = 0$.

42 $20 \times \frac{21}{2} = 210$.

43 $u_8 = 16$ et $u_{15} = 30$; $S = 8 \times 23 = 184$.

44 **a)** Non, car $\frac{u_1}{u_0} = 2 \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$.

b) Oui, car $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$ $(= -6)$.

45 $u_0 = 5\,000$ et $u_8 = 0{,}012\,8$.

46 $q^2 = \frac{1}{4}$ et $q > 0$ donc $q = \frac{1}{2}$; $u_4 = 4$ et $u_8 = \frac{1}{4}$.

DÉFINIR UNE SUITE

47 **a)** $f(x) = 2x + 5$.

$u_0 = 5$, $u_1 = 7$, $u_2 = 9$, $u_3 = 11$, $u_4 = 13$, $u_5 = 15$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.

$u_0 = -\frac{1}{2}$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{3}{4}$, $u_3 = \frac{8}{5}$, $u_4 = \frac{5}{2}$, $u_5 = \frac{24}{7}$.

48 **a)** $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

$u_0 = -5$, $u_1 = -2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 10$, $u_4 = 19$, $u_5 = 30$.

b) $f(x) = |3 - 2x|$.

$u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 7$.

49 **a)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$.

$u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $u_5 = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

b) $f(x) = x^2 - \sqrt{x} + 1$.

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3 - \sqrt{2}$, $u_3 = 10 - \sqrt{3}$, $u_4 = 15$, $u_5 = 26 - \sqrt{5}$.

50 *Corrigé dans le manuel.*

51 **a)** $f(x) = \frac{x - 1}{x}$.

$u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -1$, $u_3 = 2$, $u_4 = \frac{1}{2}$, $u_5 = -1$.

b) $f(x) = x(x + 1)$.

$u_1 = 2$, $u_2 = 6$, $u_3 = 42$, $u_4 = 1\,806$, $u_5 = 3\,263\,442$.

52 **a)** $u_{n-1} = 3(n - 1)^2 - 1 = 3n^2 - 6n + 2$;

$u_{n+1} = 3(n + 1)^2 - 1 = 3n^2 + 6n + 4$;

$u_{2n} = 3(2n)^2 - 1 = 12n^2 - 1$;

$u_{2n+1} = 3(2n + 1)^2 - 1 = 12n^2 + 12n + 2$.

b) $u_{n-1} = \frac{2(n - 1) - 1}{(n - 1) + 1} = \frac{2n - 3}{n}$;

$u_{n+1} = \frac{2(n + 1) - 1}{(n + 1) + 1} = \frac{2n + 1}{n + 2}$;

$u_{2n} = \frac{4n - 1}{2n + 1}$; $u_{2n+1} = \frac{4n + 1}{2n + 2}$.

53 **a)** $u_{n-1} = \frac{(n - 1)^2 + (n - 1) + 1}{2(n - 1) + 1} = \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$;

$u_{n+1} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 1}{2(n + 1) + 1} = \frac{n^2 + 3n + 3}{2n + 3}$;

$u_{2n} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{4n + 1}$;

$u_{n+1} = \dfrac{(2n+1)^2 + (2n+1) + 1}{2(2n+1)+1} = \dfrac{4n^2 + 6n + 3}{4n+3}$.

b) $u_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{2n}$; $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{2n+4}$; $u_{2n} = \dfrac{-1}{4n+2}$; $u_{2n+1} = \dfrac{1}{4n+4}$.

54 *Corrigé dans le manuel.*

55 $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16$, $u_4 = 21$, $u_5 = 26$.
Conjecture : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 5n$.
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 5(n+1) = 1 + 5n + 5 = u_n + 5$.

56 $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{4}$, $u_4 = \dfrac{1}{5}$, $u_5 = \dfrac{1}{6}$.

Conjecture : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

$u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$

et $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n+1}} = 1 - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

57 **a)** $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ mais $u_3 = 7$: les termes de la suite ne sont pas tous égaux à 1.
b) $u_n - 1 = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2)$. Donc :
$u_n = 1 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 0$
$\Leftrightarrow n \in \{0 ; 1 ; 2\}$.
Seuls les trois premiers termes de la suite sont égaux à 1.

58 **1.** $u_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{8}{3}$, $u_4 = \dfrac{15}{4}$, $u_5 = \dfrac{24}{5}$,

$u_{50} = \dfrac{2\,499}{50}$, $u_{100} = \dfrac{9\,999}{100}$.

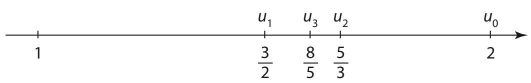
2. $v_1 = -\dfrac{3}{2}$, $v_2 = -\dfrac{5}{6}$, $v_3 = \dfrac{11}{30}$, $v_4 = -\dfrac{779}{330}$.

59 **a)** $u_1 = \sqrt{(5+1)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$;
$u_2 = \sqrt{(\sqrt{37}+1)^2 + 1^2} = \sqrt{39 + 2\sqrt{37}}$.
b) $u_{n+1} = \sqrt{(u_n + 1)^2 + 1^2} = \sqrt{u_n^2 + 2u_n + 2}$.

60 **a)** $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{3}$, $u_3 = \dfrac{8}{5}$.

b) $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

c) $u_4 = \dfrac{13}{8}$, $u_5 = \dfrac{21}{13}$, $u_6 = \dfrac{34}{21}$.



61 **1.** On obtient les termes u_7, u_8, …, u_{15} de la suite définie par $u_n = 3n - 2$ (suite arithmétique de raison 3, $u_7 = 19$, $u_8 = 22$…).
2.

```
Variables
i, u, n, p
entrées
n,
Traitement
p reçoit n + 10
Pour i de n jusque p faire
u reçoit 1.5*i + 4
Afficher « u » i « = » u
FinPour
```

SUITES ARITHMÉTIQUES

62 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{3}(n+1) - 1 - \left(\dfrac{5}{3}n - 1\right) = \dfrac{5}{3}$.
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\dfrac{5}{3}$.
b) $u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 2$: la suite n'est pas arithmétique.

63 *Corrigé dans le manuel.*

64 **a)** $u_0 = -1$, $u_1 = -3$, $u_2 = -7$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: la suite n'est pas arithmétique.
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 2.

65 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 - \dfrac{n}{2}$.
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + \dfrac{n-1}{10}$.

66 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{n-5}{2}$.
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3(n - 10) = 30 - 3n$.

67 $u_{10} - u_5 = 5r$ donc $r = 1{,}2$.
$u_{20} = u_{10} + 10r = 33 + 12 = 45$.

68 $u_{2010} - u_{2000} = 10r$ donc $r = -4{,}1$.
$u_{10000} = u_{2000} + 8\,000r = -32\,726$.

69 $u_5 - u_3 = 2r$ donc $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$u_{10} = u_5 + 5r = 2\sqrt{2} + 5\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

70 *Corrigé dans le manuel.*

71 $u_5 + u_6 + u_7 = 3u_6 = -27$, d'où $u_6 = -9$.
$u_9 - u_6 = 3r$, d'où $r = -2$.
$u_0 = u_6 - 6r = 3$.

72 $u_{10} + u_{12} + u_{14} = 3u_{12} = 33$, d'où $u_{12} = 11$.
$u_{100} - u_{12} = 88r$, d'où $r = \dfrac{1}{2}$.
$u_0 = u_{12} - 12r = 5$.

73 $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_8$
$= (u_3 - 2r) + (u_3 - r) + u_3 + \ldots + (u_3 + 5r)$
$= 8u_3 + 12r = 56 + 12r$ d'où $r = 10$.
$u_0 = u_3 - 3r = -23$.

74 $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) + (2n+9) = 55$, soit $10n + 25 = 55$ et $n = 3$.
Les nombres cherchés sont 7, 9, 11, 13 et 15.

75 **a)** Les différences successives sont constantes et égales à 4. On peut conjecturer que ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4.
b) A1 = A49 – 48 × 4 = 195 – 192 = 3.

76 La raison est 1,5.
A30 = A231 – 201 × 1,5 = 41,5 ;
A100 = A30 + 70 × 1,5 = 146,5.

77 $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 3n$

et $v_n = \frac{1}{2}(1 + 3n) + 2 = \frac{3n+5}{2}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{3}{2}$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = 2(1 + 3n) + 3 \times \frac{3n+5}{2} = \frac{21}{2} n + \frac{19}{2}$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{21}{2}$.

La suite (w_n) est arithmétique de raison $\frac{21}{2}$.

• *Autre méthode :* $w_{n+1} - w_n = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} - 2u_n - 3v_n$

$= 2(u_{n+1} - u_n) + 3(v_{n+1} - v_n) = \frac{21}{2}$.

78 $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$

et $v_n = 2(u_0 + nr) + 5 = (2u_0 + 5) + nr$.

$v_{n+1} - v_n = (2u_0 + 5) + (n + 1)r - (2u_0 + 5) - nr = r$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison r.

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{3n} = u_0 + 3nr$ et $w_n = (u_0 + 3nr) + 5$.

$w_{n+1} - w_n = u_{3(n+1)} - 1 - u_{3n} + 1 = 3r$.

La suite (w_n) est arithmétique de raison $3r$.

79 **a)** $u_1 = \frac{1}{3},\ u_2 = \frac{1}{5},\ u_3 = \frac{1}{7},\ u_4 = \frac{1}{9},\ u_5 = \frac{1}{11}$.

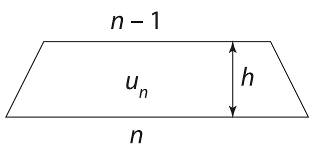
b) $v_0 = 1,\ v_1 = 3,\ v_2 = 5,\ v_3 = 7,\ v_4 = 9,\ v_5 = 11$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 + 2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 2$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + 2n$ et $u_n = \frac{1}{1 + 2n}$.

80 **a)**



Pour $n \geqslant 2$, u_n est l'aire d'un trapèze isocèle de hauteur $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de bases n et $n - 1$.

Donc $u_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{n - 1 + n}{2} = (2n - 1)\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$u_{n+1} = [2(n + 1) - 1]\frac{\sqrt{3}}{4} = u_n + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme $u_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} = u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, la suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Pour $n \geqslant 2$, v_n est le périmètre du trapèze isocèle dessiné au **a)**.

$v_n = 1 + (n - 1) + 1 + n = 2n + 1$.

$v_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 = v_n + 2$.

De plus, $v_2 = 5 = v_1 + 2$, la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

81 • **1.** et **2.**

• $a_n = \left[\frac{1}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right) + 3\right] \times 1 = \frac{1}{3} n + \frac{19}{6}$;

la suite (a_n) est arithmétique de premier terme $a_0 = \frac{19}{6}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

• $p_n = 1 + \left(\frac{1}{3} n + 3\right) + \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \left(\frac{1}{3}(n + 1) + 3\right)$

$= \frac{2}{3} n + \frac{22 + \sqrt{10}}{3}$.

(p_n) est la suite arithmétique de premier terme $p_0 = \frac{22 + \sqrt{10}}{3}$ et de raison $\frac{2}{3}$.

82 **1.** (non P) : il existe un entier naturel n tel que :

$u_{n+1} - u_n \neq u_1 - u_0$.

2. Application :

• $u_0 = 0,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: la suite n'est pas arithmétique.

• $v_0 = -1,\ v_1 = 1,\ v_2 = \frac{5}{3}$.

$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$: la suite n'est pas arithmétique.

• $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = 1$.

La suite (w_n) est arithmétique de raison 1.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

83 **a)** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+4}}{3^{n+3}} \times \frac{3^{n+2}}{2^{n+3}} = \frac{2}{3}$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 23$.

$\frac{u_1}{u_0} = 4 \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{23}{4}$.

Deux quotients de termes consécutifs ne sont pas égaux : la suite (u_n) n'est pas géométrique.

84 **a)** $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$: la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n + 1}$. Le quotient de deux termes consécutifs dépend de n : la suite (u_n) n'est pas géométrique.

85 $u_3 = u_0 \times q^3 = 3 \times 5^3 = 375$.

$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 3 \times 5^{10} = 29\,296\,875$.

86 *Corrigé dans le manuel.*

87 $\frac{u_7}{u_5} = q^2 = \frac{4\,374}{486} = 9$ avec $q > 0$, donc $q = 3$.

$u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{486}{3^5} = 2$.

$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 2 \times 3^{10} = 118\,098$.

88 $\frac{u_4}{u_2} = q^2 = -\frac{1{,}228\,8}{1{,}92} = 0{,}64$ avec $q > 0$, donc $q = 0{,}8$.

$u_0 = \frac{u_2}{q^2} = -\frac{1{,}92}{0{,}64} = -3$.

$u_5 = u_0 \times q^5 = -3 \times 0{,}8^5 = -0{,}983\,04$.

89 $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \Leftrightarrow u_n q^2 = u_n + u_n q$.

Les termes u_n étant tous non nuls, cette dernière équation équivaut à $q^2 - q - 1 = 0$ qui admet comme solutions $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Seul q_1 est positif. Donc $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : c'est le nombre d'or.

90 $u_0 = 5$; $u_1 = 5q$; $u_2 = 5q^2$ $(q \neq 1)$:

$2u_2 = 3u_1 - u_0 \Leftrightarrow 2 \times 5q^2 - 3 \times 5q + 5 = 0$

$\Leftrightarrow q = 1$ (impossible) ou $q = \frac{1}{2}$.

La raison cherchée est $\frac{1}{2}$.

91 **a)** Tous les quotients de deux termes consécutifs sont égaux à 1,1. On peut donc conjecturer que ces termes appartiennent à une suite géométrique de raison 1,1.

b) $A1 = \frac{A7}{1{,}1^6} = \frac{5{,}491\,839\,1}{1{,}771\,561} = 3{,}1$.

92 $\frac{A5}{A4} = 0{,}8$. La raison est donc égale à 0,8.

$A8 = A6 \times 0{,}8^2 = 0{,}020\,971\,52$.

$A9 = A8 \times 0{,}8 = 0{,}016\,777\,216$.

93 $b = \sqrt{aq}$, $c = aq^2$;

il en résulte que $ac = b^2$ et comme b est positif, $b = ac$.

On dit que b est la moyenne géométrique de a et c.

94 $x = 45q = \frac{2\,205}{q}$ soit $q^2 = \frac{2\,205}{45} = 49$.

Il en résulte que $q = 7$ ou $q = -7$ et $x = 315$ ou $x = -315$.

95 Si le volume est divisé par 8 après chaque heure écoulée, son diamètre est divisé par 2.

Les diamètres relevés à chaque heure sont les premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Le problème revient donc à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n < 1$ soit $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10}$, équivalente à $2^n > 10$.

$2^3 = 8$ et $2^4 = 16$. À la 4e heure, on constatera que ce qui reste de la boule n'est plus retenu par la grille.

96 **a)** $p_5 = p_0 \times 1{,}03^5$.

b) $1{,}03^5 \approx 1{,}159$. L'augmentation de p_0 à p_5 est donc d'environ 15,9 %.

97 On note C_0 le capital placé initialement.

a) Les intérêts étant capitalisés,

$C_1 = C_0 \times 1{,}05$,

$C_2 = C_1 \times 1{,}05 = C_0 \times 1{,}05^2$

$\vdots$

$C_{10} = C_0 \times 1{,}05^{10}$.

Soit $C_0 = \frac{10\,000}{1{,}05^{10}} \approx 6\,139{,}13$ €.

b) Les intérêts n'étant pas capitalisés,

$C_1 = C_0 + 0{,}05\ C_0$,

$C_2 = C_1 + 0{,}05\ C_0 = C_0 + 2 \times 0{,}05\ C_0$,

$\vdots$

$C_{10} = C_0 + 10 \times 0{,}05\ C_0 = 1{,}5\ C_0$.

Soit $C_0 = \frac{10\,000}{1{,}5} \approx 6\,666{,}67$ €.

DÉNOMBREMENT

98 *Corrigé dans le manuel.*

99 **a)** Le plus petit multiple de 3 de l'intervalle I est 30, le plus grand est 111, ils sont distants de 81, ce qui représente 27 intervalles de longueur 3 soit 28 multiples de 3.

Ou : les multiples de 3 sont $10 \times 3, \ldots, 37 \times 3$ et sont donc au nombre de $37 - 10 + 1 = 28$.

b) Les multiples de 7 de l'intervalle I sont : 28,…,112, soit $4 \times 7, \ldots, 16 \times 12$. Ils sont donc $16 - 4 + 1$, soit 13.

100 **a)** $57 - 1 = 56 = 28 \times 2$ donc 28 intervalles de longueur 2, soit 29 termes.

Ou : les termes sont de la forme $u_n = 2n + 1$ avec n de 0 à 28, donc 29 termes.

b) $126 - 9 = 117 = 39 \times 3$ donc 39 intervalles de longueur 3, soit 40 termes.

Ou : les termes sont de la forme $v_n = 3n$ avec n de 3 à 42, donc 40 termes $(42 - 3 + 1 = 40)$.

c) $1 = \frac{1}{2^0}$; donc les termes sont « numérotés » de 0 à n, soit $(n + 1)$ termes.

101 **a)** 10 termes : $14 - 5 + 1$.

b) $u_n = 2^n$ pour n de 0 à 23 donc 24 termes.

c) $u_n = 3^{2n+1}$ pour n de 3 à 23 donc 21 termes $(23 - 3 + 1 = 21)$.

SOMME DE TERMES

102 **a)** La somme compte 50 termes ($u_n = 2n + 1$ pour n de 0 à 49).

Donc $2S = 50 \times (1 + 99)$ et $S = 50^2$.

b) La somme compte n termes ($u_m = 2m - 1$ pour m de 1 à n).

Donc $2S = n(1 + 2n - 1)$ et $S = n^2$.

103 $S = 12(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^5) = 12 \times \frac{1 - 4^6}{1 - 4}$

$S = 4(4^6 - 1) = 16\,380$.

104 **a)** $\begin{cases} (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) = 9 \\ (u_0 + 10r) + (u_0 + 11r) = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 2r = 3 \\ 2u_0 + 21r = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

b) $S = 31 \times \frac{u_0 + u_{30}}{2} = 31 \times \frac{-1 + (-1 + 60)}{2} = 899$.

105 **1.** $\begin{cases} u_0 + 10r = -12 \\ u_0 + 20r = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ u_0 = 8 \end{cases}$

2. $S = u_{10} + u_{20} + \ldots + u_{100} = 10 \times \frac{u_{10} + u_{100}}{2}$

$= -1\,020$.

• *Autre solution :* $S = 10u_0 + 10r(1 + 2 + \ldots + 10)$

$= 80 + 550(-2) = -1\,020$.

106 *Corrigé dans le manuel.*

107 $S_{33} = 0$ donc $u_1 + u_{33} = 0$.

$2u_1 + 32(-7) = 0$, soit $u_1 = 112$ et $u_{33} = -112$.

108 $S_n = n \times \dfrac{u_1 + 14}{2}$ et $u_1 + 7(n-1) = 14$; donc :
$-1\,176 \times 2 = n[14 - 7(n-1) + 14]$, ce qui équivaut à
$7n^2 - 35n - 2\,352 = 0$,
équation dont la solution positive est $n = 21$.
On trouve $u_1 = -126$.

109 **a)** $S = 3 + 6 + 9 + \ldots + 999$.
Les termes sont de la forme $3n$ pour n de 1 à 333.
$S = 333 \times \dfrac{3 + 999}{2} = 166\,833$.
b) $S = 5 + 10 + 15 + \ldots + 9\,995$.
Les termes sont de la forme $5n$ pour n de 1 à 1 999.
$S = 1\,999 \times \dfrac{5 + 9\,995}{2} = 9\,995\,000$.

110 $S = 10 + 20 + \ldots + 180 = 10(1 + 2 + \ldots + 18)$
$S = 10 \times \dfrac{18 \times 19}{2} = 1\,710$ €.

111 $S = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{20}} = \dfrac{1}{2^2}\left[1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{18}\right]$

$$S = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{19}}\right)$$

$S = \dfrac{524\,287}{1\,048\,576} \approx 0{,}499\,999$.

112 $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} - \ldots - \dfrac{1}{3^8} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$S = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4 \times 3^8} = \dfrac{1\,640}{6\,561} \approx 0{,}2499$.

113 $t + (t+1) + (t+2) + (t+3) + (t+4) = 160$
$\Leftrightarrow 5t + 10 = 160$ et $t = 30$.

114 **a)** $L = 50\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^6}\right) = 50 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^7}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$= 100\left(1 - \frac{1}{2^7}\right) = 100 \times \frac{127}{128} = 99{,}218\,75.$$

115 **a)** La suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.
b) L'objectif est le calcul de la somme des 11 premiers termes de la suite (de u_0 à u_{10}).

116

```
▼ VARIABLES
   ├ i EST_DU_TYPE NOMBRE
   ├ u EST_DU_TYPE NOMBRE
   ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
   └ S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
   ├ LIRE n
   ├ u PREND_LA_VALEUR 2
   ├ S PREND_LA_VALEUR u
   ▼ POUR i ALLANT_DE 2 A n
      ├ DEBUT_POUR
      ├ u PREND_LA_VALEUR u+1/2
      ├ S PREND_LA_VALEUR S+u
      └ FIN_POUR
   ├ AFFICHER "S = "
   └ AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

117 **a)** Les volumes successifs sont, en cm^3 :
$1\,000, \dfrac{1\,000}{2}, \dfrac{1\,000}{2^2}, \ldots$
et le 8ᵉ est $\dfrac{1\,000}{2^7}$ soit $\dfrac{125}{16} = 7{,}8125$.
b) $S = 1\,000\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^9}\right)$

$$= 1\,000\,\frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\,000\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$S = 1\,998{,}047$ cm^3, à 1 mm^3 près.

118 **1.** $w_0 = 3$, $w_1 = 2$, $w_2 = 2$,
$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ et $\dfrac{w_1}{w_0} \neq \dfrac{w_2}{w_1}$: la suite (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2$: la suite (u_n) est arithmétique.
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2$: la suite (v_n) est géométrique.
3. $S = (u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_{10})$
$= -2(0 + 1 + \ldots + 9) + 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9)$
$= -2 \times \dfrac{10 \times 9}{2} + 2 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = -90 + 2(2^{10} - 1) = 1\,956$.

ROC Restitution organisée de connaissances

119 **1.** $3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + \ldots + n \times 3 = \dfrac{3n(n+1)}{2}$.
2. $S = 1 + 4 + 7 + \ldots + 301$
$= 1 + (1 + 3) + (1 + 2 \times 3) \ldots + (1 + 100 \times 3)$
$= 101 + \dfrac{3 \times 100 \times 101}{2} = 15\,251$.

120 **1.** $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$= u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = u_0 \times 1 - \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. $S = 9(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8) = 9 \times \dfrac{1 - 3^9}{1 - 3} = 88\,569$.

Prendre toutes les initiatives

121 $S = 3 + 13 + 23 + \ldots + 2\,153$
$= 216 \times 3 + 10(1 + 2 + \ldots + 215)$
$= 648 + 10 \times \dfrac{215 \times 216}{2} = 232\,848$.

122 Notons a et $a + r$ les mesures des côtés de l'angle droit et $(a + 2r)$ la mesure de l'hypoténuse ($r > 0$).
$a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$ soit $a^2 - 2ar - 3r^2 = 0$.
$\Delta = 16r^2$ et $a = 3r$.
Réponse : oui, avec $3r$, $4r$ et $5r$ comme mesures.
Exemples : (3 ; 4 ; 5), (6 ; 8 ; 10),…

EXERCICES Approfondissement (page 137)

123 $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$.

On peut conjecturer que les valeurs prises, dans l'ordre 1, 0, –1, se répètent « indéfiniment ».

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} - 1}{3u_{n+2} + 1} = \frac{\dfrac{u_{n+1} - 1}{3u_{n+1} + 1} - 1}{3 \times \dfrac{u_{n+1} - 1}{3u_{n+1} + 1} + 1} = \frac{-2u_{n+1} - 2}{6u_{n+1} - 2}$$

$$= \frac{u_{n+1} + 1}{-3u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{3u_n + 1} + 1}{-3 \times \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 1} + 1} = \frac{4u_n}{4} = u_n.$$

124 $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{8+4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2} = 2 \times \dfrac{1}{4}.$

Les trois nombres sont bien trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

125 Avec $a = b - r$ et $c = b + r$,

$$\begin{cases} a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 525 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 13 \\ 3b^2 + 2r^2 = 525 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 13 \\ r = 3 \text{ ou } r = -3 \end{cases}$$

Les nombres cherchés sont donc 10, 13 et 16 (ou 16, 13 et 10).

126 Avec $a = b - r$ et $c = b + r$,

$$\begin{cases} a + b + c = -15 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 107 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ 3b^2 + 2r^2 = 107 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ r = 4 \text{ ou } r = -4 \end{cases}$$

Les nombres cherchés sont donc –9, –5 et –1 (ou –1, –5 et –9).

127 Avec $a = c - 2r$, $b = c - r$, $d = c + r$, $e = c + 2r$,

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 55 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 695 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 11 \\ 5c^2 + 10r^2 = 695 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 11 \\ r = 3 \text{ ou } r = -3. \end{cases}$$

Les nombres cherchés sont 5, 8, 11, 14 et 17 (ou 17, 14, 11, 8, 5).

128 • Il existe un réel r non nul tel que $a = b - r$ et $c = b + r$.

$a + b + c = 18 \Leftrightarrow 3b = 18 \Leftrightarrow b = 6$.

• Il existe un réel q non nul tel que $a = bq$ et $c = bq^2$, soit $a = 6q$ et $c = 6q^2$. Dans ces conditions :

$a + b + c = 18 \Leftrightarrow 6(q + 1 + q^2) = 18$

$\Leftrightarrow q^2 + q + 1 = 3 \Leftrightarrow q = 1$ ou $q = -2$.

La solution $q = 1$ ne convient pas, car dans ce cas $a = b = c = 6$ et la raison r est nulle.

• Donc les nombres cherchés sont obtenus avec $q = -2$, ce sont –12, 6 et 24.

129 **a)** $v_n = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = -u_n \Leftrightarrow q = -1$.

Or par hypothèse, $q \neq -1$, donc :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

Remarque : on a aussi $u_n \neq 0$ car $u_0 \neq 0$.

b) $t_{n+1} = \dfrac{w_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{u_n \times qu_n}{u_n + qu_n} = \dfrac{q}{1+q} u_n$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = qv_n$ et $w_{n+1} = q^2 w_n$.

Il en résulte : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{w_{n+1}}{v_{n+1}} = qt_n$.

La suite (t_n) est géométrique, de premier terme $t_0 = \dfrac{q}{1+q} u_0$ et de raison q.

130 **a)** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + u_n^2 = v_n + 1$.

b) $v_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = n$.

$u_n = \sqrt{1 + v_{n-1}} = \sqrt{n}$.

131 **a)** $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{1}{6}$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$: la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

b) $v_0 = 3$, $v_1 = 5$, $v_2 = 7$.

On peut conjecturer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme 3 (les nombres impairs sauf 1…).

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{u_n} + 1 = \dfrac{1}{u_n} + 3 = v_n + 2$.

La suite (v_n) est bien arithmétique de raison 2.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 + 2n$.

Comme $\dfrac{1}{u_n} = v_n - 1$, $u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{2n + 2}$.

132 **a)** $u_1 = \dfrac{3}{4}$, $u_2 = \dfrac{5}{8}$, $u_3 = \dfrac{9}{16}$, $u_4 = \dfrac{17}{32}$, $u_5 = \dfrac{33}{64}$.

$u_2 - u_1 = -\dfrac{1}{8} \neq u_3 - u_2 = -\dfrac{1}{16}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{6} \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{9}{10}$: la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2} u_n + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}$.

133 **a)** $u_1 = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{63}{16}$, $u_3 = \dfrac{255}{64}$, $u_4 = \dfrac{1\,023}{256}$, $u_5 = \dfrac{4\,095}{1\,023}$.

$u_2 - u_1 = \dfrac{3}{16} \neq u_3 - u_2 = \dfrac{3}{64}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{63}{60} \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{255}{252}$: la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} - 1 = \dfrac{1}{4} v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -1$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{1}{4^n}$ et $u_n = 4 - \dfrac{1}{4^n}$.

134 **1.** $u_0 = -1$, $u_1 = -\frac{4}{5}$, $u_2 = -\frac{2}{3}$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$: la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. $u_n = 0$ entraîne $u_{n-1} = 0$, qui entraîne $u_{n-2} = 0$. Ainsi, de proche en proche, tous les termes de la suite qui précèdent u_n sont nuls, ce qui contredit le fait que $u_0 = -1$.

Donc, tous les termes de la suite (u_n) sont non nuls.

3. La suite (v_n) semble arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{\frac{12u_n}{4-u_n}+2}{\frac{4u_n}{4-u_n}} = \frac{10u_n+8}{4u_n} = \frac{\frac{5}{2}u_n+2}{u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n} - \frac{1}{2} = v_n - \frac{1}{2}.$$

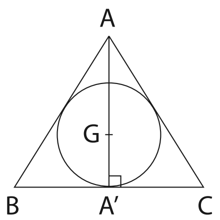
4. a) $v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - \frac{n}{2}$.

b) $u_n \times v_n = 3u_n + 2$ soit $u_n(v_n - 3) = 2$.

Comme $v_n = 3 + \frac{2}{u_n}$, $v_n - 3 \neq 0$ et $u_n = \frac{2}{v_n - 3}$.

D'où $u_n = \dfrac{2}{1 - \frac{n}{2} - 3} = -\dfrac{4}{n+4}$.

135 • Remarquons que les triangles équilatéraux ont tous le même centre de gravité : le centre commun des cercles.



Soit (a_n) la suite (décroissante) des aires des disques (de rayon R_n) et (b_n) la suite (décroissante) des aires des triangles équilatéraux.

1. GA = 2GA' : le rayon du cercle inscrit est la moitié du rayon du cercle circonscrit, donc $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ et (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

2. $R_n = GA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}\frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{\sqrt{3}}$,

soit $BC = R_n\sqrt{3}$.

• $b_n = \text{aire (ABC)} = \dfrac{BC \times AA'}{2} = \dfrac{R_n\sqrt{3} \times \frac{3}{2}R_n}{2}$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \times \pi R_n^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}a_n.$$

Notons k le réel $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ ($k \approx 0{,}413$) ;

alors pour tout naturel n, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{ka_{n+1}}{ka_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$;

la suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

136 **a)** $u_n = n\frac{\pi}{2}$, la suite est arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ et de 1^er^ terme $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

b) $L = \frac{\pi}{2}(1 + 2 + \ldots + 9) = \frac{\pi}{2} \times \frac{9 \times 10}{2} = 45\frac{\pi}{2}$,

donc $L \approx 70{,}7$ cm.

137 $A_1 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $A_2 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$, $A_3 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2$,

$A_4 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{5}{16}\right)^2$ et $A_5 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{5}{32}\right)^2$.

$$\text{La somme } S = \frac{\pi}{2} \times 5^2 \times \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{32^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 5^2 \times \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 5^2 \times \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^8}\right)$$

$$= \frac{25\pi}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{2^9}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{25\pi}{6} \times \left(1 - \frac{1}{512}\right).$$

Il reste donc :

$$\frac{25\pi}{2} - \frac{25\pi}{6} \times \left(1 - \frac{1}{512}\right) = \frac{25\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{1\,024}\right) \approx 26{,}20 \text{ cm}^2.$$

Remarque : l'intérêt de cette configuration, dans l'objectif du chapitre 6, c'est de conjecturer que quel que soit le nombre de demi-disques « enlevés », il reste toujours au moins les deux tiers du demi-disque initial.

138 **a)** $1 - \frac{0{,}027\,6}{100} = 0{,}999\,724$.

$0{,}999\,724^{2511} \approx 0{,}500\,007$ et $0{,}999\,724^{2512} \approx 0{,}499\,9$.

La demi-vie de l'uranium 234 est donc d'environ 2 511 siècles.

b) $0{,}5^{1/760} \approx 0{,}999\,088\,38 = 1 - t$; d'où $t = 0{,}000\,911\,62$ soit environ 0,091 1 % par siècle.

c) En 76 000 ans, la moitié des atomes sont désintégrés. Pendant les 76 000 années suivantes, la moitié de ce qui reste est à son tour désintégrée : il en reste donc le quart.

Vérification : $0{,}999\,088\,38^{1520} \approx 0{,}249\,999\,99$.

139 La plaque laisse donc passer 55 % du son qui la pénètre. Le problème est donc de déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}55^n < 0{,}01$.

À la calculatrice, $0{,}55^7 \approx 0{,}015$ et $0{,}55^8 \approx 0{,}008$.

On doit donc superposer (au moins) 8 plaques.

140 **1.** Au bout d'un an, l'option A (2 000 €) est plus intéressante que l'option B (1 900 × 1,04 = 1 976 €).

2. Notons le salaire mensuel de l'année n, A_n dans l'option A et B_n dans l'option B.

La suite (A_n) est arithmétique de premier terme $A_1 = 1\,900$ et de raison 100, la suite (B_n) est géométrique de premier terme $B_1 = 1\,900$ et de raison 1,04.

À l'aide d'un tableur :

	A	B
1	1900	1900
2	2000	1976
3	2100	2055,04
4	2200	2137,24
5	2300	2222,73
6	2400	2311,64
7	2500	2404,11
8	2600	2500,27
9	2700	2600,28
10	2800	2704,29
11	2900	2812,46
12	3000	2924,96
13	3100	3041,96
14	3200	3163,64
15	3300	3290,19
16	3400	3421,79
17	3500	3558,66
18	3600	3701,01
19	3700	3849,05
20	3800	4003,01

La lecture de ce tableau permet de conclure que l'option A est la plus intéressante pendant les 14 premières années et qu'ensuite l'option B est plus intéressante.

141 **a)** p_6 à 12 h 00 et p_{12} à 14 h 00.
b) La population semble doubler toutes les 20 minutes : $p_n = 1\,000 \times 2^n$.
c) À 20 h 00, $n = (20 - 10) \times 3 = 30$ et $p_{30} = 1\,000 \times 2^{30}$ soit une population d'environ 1 milliard et 73 millions (1 073 741 824).

142 **a)** Au 01/01/2012, Enzo dispose de :
$1\,000 + (1\,000 \times 0{,}025) = 1\,025$ €
et Valentin dispose de $900 \times (1 + 0{,}03) = 917$ €.
b) $u_n = 1\,000 + 25n$: la suite est arithmétique.
$v_n = 900 \times 1{,}03^n$: la suite est géométrique.
c) Le 1er janvier 2017 (soit $n = 6$), Enzo disposera de $1\,000 + 6 \times 25 = 1\,150$ € et Valentin disposera de $900 \times 1{,}03^6 = 1\,074{,}65$ €.
d) La lecture du tableau ci-contre, obtenu avec un tableur, permet d'affirmer que le capital de Valentin dépassera celui d'Enzo au début de l'année 2025 (2011 + 14).

	A	B	C
1	0	1000	900
2	1	1025	927
3	2	1050	954,81
4	3	1075	983,454
5	4	1100	1012,96
6	5	1125	1043,35
7	6	1150	1074,65
8	7	1175	1106,89
9	8	1200	1140,09
10	9	1225	1174,3
11	10	1250	1209,52
12	11	1275	1245,81
13	12	1300	1283,18
14	13	1325	1321,68
15	14	1350	1361,33
16	15	1375	1402,17
17	16	1400	1444,24

143 **a)** $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dfrac{1}{7} = u_0$.
On peut conjecturer que tous les termes de la suite sont égaux à $\dfrac{1}{7}$.
On peut montrer que la suite définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{7}$ est géométrique de raison 8 et de premier terme 0, donc dont tous les termes sont nuls.

b) Avec une calculatrice, la valeur obtenue pour u_{20} (dépend de la machine utilisée) est très éloignée de $\dfrac{1}{7}$.
Sur la Casio Graph 35+, on trouve $u_{20} \approx -51{,}32$.
Cela est dû aux erreurs d'arrondis, multipliées de proche en proche par 8…

144 **a)** $p_2 = 1$, $p_3 = 3$, $p_4 = 6$ et $p_5 = 10$.
b) On relie ce nouveau point aux n précédents donc n nouveaux segments.
c) $p_{n+1} = p_n + n$,
relation vraie pour tout entier naturel car $p_0 = 0$, $p_1 = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
p_n &= p_{n-1} + n - 1\\
p_{n-1} &= p_{n-2} + n - 2\\
p_{n-2} &= p_{n-3} + n - 3\\
&\vdots\\
p_2 &= p_1 + 1\,;
\end{aligned}$$

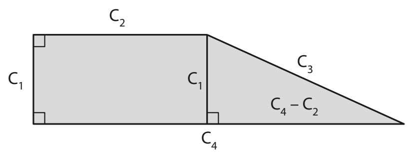
$$p_n = p_1 + (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prendre toutes les initiatives

145 $\begin{cases} a(1 + q + q^2) = 21 \\ a(2 + q - q^2) = 27 \end{cases}$ et $1 + q + q^2 > 0$ ($\Delta < 0$).
Il en résulte :
$\dfrac{2 + q - q^2}{1 + q + q^2} = \dfrac{27}{21} = \dfrac{9}{7}$ et $16q^2 + 2q - 5 = 0$.
Les solutions sont $q = \dfrac{1}{2}$ et $q = -\dfrac{5}{8}$. Les nombres cherchés sont $(12\,;6\,;3)$ ou $\left(\dfrac{192}{7}\,; -\dfrac{120}{7}\,; \dfrac{75}{7}\right)$.

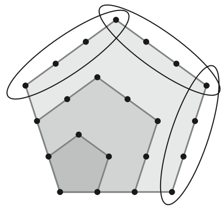
146 $$\begin{aligned} 11{,}111\,111\,1 &= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^7}\\ &= 11{,}1 + \frac{11{,}1}{100} + \frac{11{,}1}{100^2}. \end{aligned}$$

147 Le carré est une solution (la suite est géométrique de raison 1).
On suppose donc que la raison q (éventuelle) est différente de 1. De plus, les mesures étant des nombres strictement positifs, on se limite à $q > 0$.



$C_1^2 + (C_4 - C_2)^2 = C_3^2$.
Donc $C_1^2[1 + (q^3 - q) - q^2] = 0$
soit $(q^3 - q) - (q^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (q^2 - 1)(q - 1) = 0$
$\Leftrightarrow (q + 1)(q - 1)^2 = 0$.
Les seules solutions sont –1 et 1, et compte tenu des remarques initiales, il n'y a qu'une suite géométrique (constante) qui convient et seuls les carrés répondent au problème.

148 Notons u_n le nombre de points associés à la figure n. Pour tout entier n non nul, $u_n = u_{n-1} + 3n - 2$.



$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + 3n - 2\\
u_{n-1} &= u_{n-2} + 3(n-1) - 2\\
u_{n-2} &= u_{n-3} + 3(n-2) - 2\\
&\vdots\\
u_2 &= u_1 + 3(2) - 2\\
\hline
u_n &= u_1 + 3[2 + 3 + \ldots + (n-1) + n] - 2(n-1)\\
&= 1 + 3 \times \frac{(n-1)(n+1)}{2} - 2n + 2 = \frac{3n^2 - n}{2}.
\end{aligned}$$

D'où $u_8 = 92$ et $u_{2011} = 6\,005\,001$.

EXERCICES Travail en autonomie (page 140)

A $1{,}04^{15} = 1{,}8009$ donc un placement à 4 % l'an convient.

B $S = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1\,830 \Leftrightarrow n^2 + n - 3\,660 = 0.$

$\Delta = 14\,641 = 121^2$; d'où $n = -61$ ou $n = 60$.

La seule solution (positive) est 60.

C **a)** La suite des rayons est arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = 1$.

b) Notons a_n la longueur de l'arc associé au rayon u_n.

$L = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}$

$L = \dfrac{1}{3} \times 2\pi u_1 + \dfrac{1}{3} \times 2\pi u_2 + \ldots + \dfrac{1}{3} \times 2\pi u_{15}$

$L = \dfrac{2\pi}{3}(1 + 2 + \ldots + 15) = \dfrac{2\pi}{3} \times \dfrac{15 \times 16}{3} = 80\pi.$

La longueur est de 251,3 cm à 1 mm près.

D **a)** $u_1 = -4$; $u_2 = -\dfrac{4}{3}$; $u_3 = -\dfrac{4}{5}$; $u_4 = -\dfrac{4}{7}$; $u_5 = -\dfrac{4}{9}$.

b) On peut conjecturer que $u_n = -\dfrac{4}{2n-1}$

donc que $u_{100} = -\dfrac{4}{199}$.

E ABC rectangle équivaut à $(q^2x)^2 = (qx)^2 + x^2$, soit, x^2 étant non nul, à $q^4 - q^2 - 1 = 0$, ou encore :

$$\begin{cases} Q = q^2 \\ Q^2 - Q - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant du trinôme $Q^2 - Q - 1$ est strictement positif et égal à 5. Le trinôme admet une seule solution positive (ce qui est nécessaire car $Q = q^2$), soit $Q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or), et $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

La réponse au problème posé est donc positive.

F **a)** $1 + 2 + \ldots + 9 = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45 = 5 \times 9$

$2 + 3 + \ldots + 10 = 54 = 6 \times 9$

$3 + 4 + \ldots + 11 = 63 = 7 \times 9$

b) Pour s'assurer que les sommes suivantes sont des multiples de 9, il suffit de constater qu'on ajoute 1 à chacun des neuf termes de la ligne précédente.

$$\begin{aligned}
S &= 5 \times 9 + 6 \times 9 + \ldots + 13 \times 9\\
&= 9 \times (5 + 6 + \ldots + 13)\\
&= 9 \times (9 \times 4 + 1 + 2 + \ldots + 9)\\
&= 9 \times \left(36 + \frac{9 \times 10}{2}\right) = 729.
\end{aligned}$$

G **a)** $u_1 = 1$; $u_2 = 2$ et $u_3 = 6$.

$u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$: la suite n'est pas arithmétique.

b) $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$: la suite n'est pas géométrique.