

# Fonctions dérivées. Applications

## ACTIVITÉ

(page 93)

### Activité

3 a) La tangente en A est horizontale pour  $a = 0$  et  $a = 2$ .

b)

$x$	-2	0	2	4	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Sens de variation de $f$					

On peut donc faire la conjecture suivante :

- si  $f'(x) > 0$ ,  $f$  est croissante ;
- si  $f'(x) < 0$ ,  $f$  est décroissante.

4 b)

$x$	-10	4	10	
$f'(x)$	-		-	
$f(x)$	↘		↘	

Sur un intervalle  $I$  : si  $f'(x) < 0$ , alors  $f$  est décroissante ;  
si  $f'(x) > 0$ , alors  $f$  est croissante.

## PROBLÈME OUVERT

$A(x; x^2)$ ,  $B(-x; x^2)$ ,  $D(x; 4)$  et  $C(-x; 4)$ , avec  $0 \leq x \leq 2$ .

$AD = 4 - x^2$  et  $AB = 2x$ ;

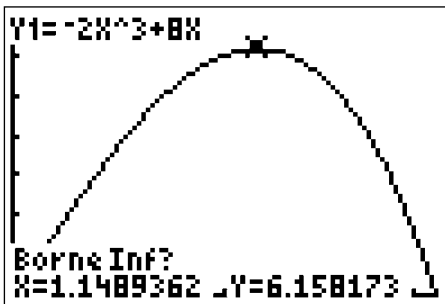
donc aire  $ABCD = 2x(4 - x^2)$

soit aire  $(ABCD) = -2x^3 + 8x$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par

$f(x) = -2x^3 + 8x$ .

- Avec une calculatrice, on obtient la courbe suivante.



On peut lire que l'aire est maximale pour  $x \approx 1,14$ .

- Avec la dérivée, on trouve  $f'(x) = -6x^2 + 8 = -6\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$ .

$x$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	0

Donc la valeur exacte de  $x$  pour laquelle l'aire est maximale est  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**1 a)**  $f'(x) = 24x^3 - 9x^2 + 4x$ .

**b)**  $g'(x) = x^2 + x - 4$ .

**c)**  $h'(x) = \frac{9}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$ .

**2 1.**  $f$  et  $g$  sont des sommes de fonctions dérivables sur  $I$ , donc elles sont dérivables sur  $I$ .

**2.**  $f'(x) = 9x^2 + 4x - \frac{1}{x^2}$ ;

$g'(x) = \frac{2}{3}(9x^2 + 4x) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{4x^2}$ .

**3 1.** Les fonctions  $u : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$  et  $v : x \mapsto \sqrt{x}$  sont dérivables sur  $I$  donc  $f$  est dérivable sur  $I$ .

**2.**  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**4**  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 4x$ ;  $f(4) = 39$ ;  $f'(4) = 17$ .

Donc la tangente en  $(4; 39)$  a pour équation  $y = 17(x-4) + 39$ , soit  $y = 17x - 29$ .

**5 a)** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 20x + 11$ .

**b)** Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**c)** Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (2x-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-x)$ ,  
soit  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}(5x-3)$ .

**6 a)** Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = \frac{12}{x^4}$ .

**b)** Sur  $\mathbb{R} - \{2\}$ ,  $f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$ .

**c)** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+2)^2}$ .

**d)** Sur  $\mathbb{R} - \{1\}$ ,  $f'(x) = \frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$ .

**7 1.**  $f'(x) = \frac{3(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$ .

**2.**  $f'(a) = \frac{3(1-a^2)}{(1+a^2)^2}$  et  $f(a) = \frac{3a}{1+a^2}$ ;

donc :  $y = \frac{3(1-a^2)}{(1+a^2)^2}(x-a) + \frac{3a}{1+a^2}$ .

$y = \frac{3(1-a^2)}{(1+a^2)^2}x + \frac{6a^3}{(1+a^2)^2}$ .

**8 1. b)**  $u'(x) = v'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ .

**2.**  $u(x) - v(x) = \frac{3(x+1)}{x+1} = 3, x \neq -1$ .

$f'(x) = 0$  donc  $u'(x) = v'(x)$ .

**9 a)**  $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$			$23$	

**b)**  $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(4x^2 - 1) = \frac{3}{4}(2x-1)(2x+1)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$
$f(x)$			$0$	

**c)**  $f'(x) = -4x^3 - 8x = -4x(x^2 + 2)$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$5$	

**10 a)**  $f'(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$
$f(x)$			$\frac{3}{2}$	

**b)**  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+4)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\frac{3}{2}$	

**11 a)**  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

$f'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$			

**b)**  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$			$-5$	$3$	

**12 a)**  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\frac{2}{3\sqrt{3}}$		$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	

**b)**  $f'(x) = 12x^2 - 4x - 5$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\frac{5}{2}$		$-\frac{391}{54}$	

**c)**  $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x^2 + 1)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$		$\frac{2 - \sqrt{5}}{2}$	

**13 1. a)**  $f'(x) = 60x - 3x^2 = 3x(20 - x)$ .

**b)**

$x$	0	20	30		
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0		4000		0

**2. a)** Le maximum est atteint le 20<sup>e</sup> jour.

**b)** 4000 personnes sont malades.

**14 1. a)**  $\frac{MP}{AB} = \frac{CP}{CA}$  soit  $\frac{MP}{3} = \frac{4-x}{4}$ ;

d'où :  $MP = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$ .

**b)**  $\mathcal{A}(x) = AP \times MP = \frac{3}{4}(4x - x^2)$ .

**2. a)**  $\mathcal{A}'(x) = \frac{3}{4}(4 - 2x)$ .

$x$	0	2	4	
$\mathcal{A}'(x)$		+	0	-
$\mathcal{A}(x)$			3	

**b)** L'aire est maximale pour  $x = 2$ .

## EXERCICES

## Activités de recherche (page 102)

### 19 Comparaison de fonctions

• *Les outils :*

- Dérivation.
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

• *L'objectif :*

- Comparer des fonctions à l'aide de la dérivée.

**1.** La représentation de  $g$  est toujours en dessous de celle de  $f$  même si elles semblent très proches pour  $x$  voisin de  $\frac{3}{2}$ .

**2. a)**  $d(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ .

$d$ , fonction polynôme, est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$d'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3).$$

**b)**  $d'(x)$  s'annule en 0 et en  $\frac{3}{2}$ , et est du signe de  $2x - 3$ .

**c)**

$x$	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	-	0	+
$f(x)$			2		$\frac{5}{16}$	

**d)** Le minimum de  $d(x)$  étant  $\frac{5}{16}$ , on peut en conclure que pour tout  $x$ ,  $d(x) > 0$ .

**e)** La courbe représentative de  $f$  est toujours au-dessus de celle de  $g$ .

### 20 Minimiser une distance

• *Les outils :*

- Distance dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- Dérivation.
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

• *Les objectifs :*

- Déterminer le minimum d'une fonction.
- Construire « à la règle et au compas » les points solutions.

**1.** On peut conjecturer que deux positions du point M répondent au problème. Elles sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Pour une de ces positions,  $x_M \approx 0,7$  et  $AM \approx 0,87$ .

**2.**  $AM^2 = (x-0)^2 + (x^2-1)^2 = x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$ .

**3. a) et b)**  $f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x(x^2 - \frac{1}{2}) = x(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

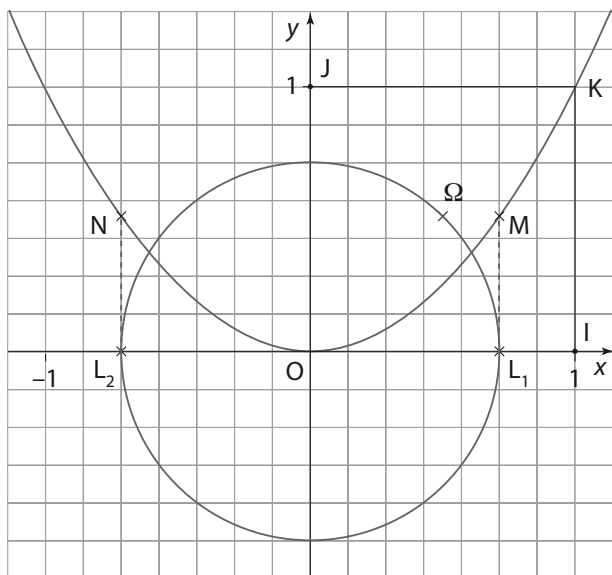
$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$			
$x$		-	-	0	+	+		
$x + \frac{1}{\sqrt{2}}$		-	0	+	+	+		
$x - \frac{1}{\sqrt{2}}$		-	-	-	0	+		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$					
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$				1			$\frac{3}{4}$			$\frac{3}{4}$

c) AM est donc minimal pour  $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$  et  $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$ .

La distance AM est alors égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ .

4. a) et b)



c) On obtient les points cherchés en traçant les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par  $L_1$  et par  $L_2$ .

## 21 Narration de recherche

1. Le périmètre est noté  $p : p = 2(x + y)$ .

$$xy = 16; \text{ donc } p = 2x + \frac{32}{x}.$$

On note  $f$  la fonction définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x + \frac{32}{x}.$$

$$f'(x) = 2 - \frac{32}{x^2} = \frac{2(x-4)(x+4)}{x^2}.$$

$x$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			16	

Or : si  $x = 4, y = 4$ ; donc ABCD est un carré.

Conclusion : Le carré est bien le rectangle de périmètre minimal.

2. Si  $xy = a$ , dans ce cas  $p = 2x + \frac{2a}{x}$ .

$$f(x) = 2x + \frac{2a}{x}; x > 0.$$

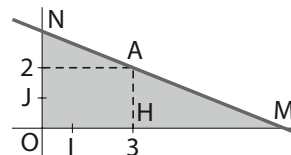
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{2a}{x^2} \\ &= \frac{2(x^2 - a)}{x^2} \\ &= \frac{2(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{x^2}. \end{aligned}$$

$x$	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$4\sqrt{a}$	

Si  $x = \sqrt{a}, y = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ .

Donc on obtient bien un carré dans le cas général.

## 22 Narration de recherche



$$\frac{AH}{ON} = \frac{HM}{OM}, \text{ donc}$$

$$ON = \frac{OM \times AH}{HM} = \frac{x \times 2}{x-3} = \frac{2x}{x-3}.$$

$$\text{Aire(OMN)} = \frac{1}{2} OM \times ON = \frac{1}{2} x \times \frac{2x}{x-3} = \frac{x^2}{x-3} \text{ avec } x > 3.$$

On note  $f$  la fonction définie sur  $]3; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ .

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

$x$	3	6	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			12	

L'aire du triangle est minimale pour  $x = 6$ .

M est le symétrique de O par rapport au point H.

## 23 TP – Recherche d'une aire minimale

3. a) Le quadrilatère AHEM est, par construction, un rectangle. Le théorème de Thalès dans le triangle ABC permet d'affirmer que  $\frac{AH}{AB} = \frac{EH}{CB}$  d'où  $AH = EH$  : le quadrilatère AHEM est un carré.

b) Le même théorème dans le triangle ADM :  $\frac{EH}{DH} = \frac{AM}{AD}$ , soit  $\frac{h}{10-h} = \frac{x}{10}$ .

$$\text{c) } 10h = (10-h) \times x \Leftrightarrow (10+x)h = 10x \Leftrightarrow h = \frac{10x}{10+x}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \mathcal{A}(x) &= \frac{hx}{2} + 10 \times \frac{10-h}{2} = \frac{10x^2}{2(10+x)} + 5\left(10 - \frac{10x}{10+x}\right) \\ &= \frac{5x^2 + 500}{10+x}. \end{aligned}$$

e)  $\mathcal{A}$  est dérivable sur  $[0; 10]$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathcal{A}'(x) &= \frac{10x(10+x) - (5x^2 + 500)}{(10+x)^2} = \frac{5x^2 + 100x - 500}{(10+x)^2} \\ &= \frac{5}{(10+x)^2} (x^2 + 20x - 100). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}'(x)$  est du signe du trinôme  $x^2 + 20x - 100$  qui a deux racines distinctes dans  $\mathbb{R}$  ( $\Delta = 800$ ) dont une seule est dans l'intervalle  $[0; 10]$ ,  $10(\sqrt{2} - 1)$ .

Le coefficient de  $x^2$  étant positif ( $a = 1$ ),  $\mathcal{A}'(x)$  est négatif entre ses racines et positif sinon.

$x$	0	$10(\sqrt{2}-1)$	10
$\mathcal{A}'(x)$	-	0	+
$\mathcal{A}(x)$	50	$100(\sqrt{2}-1)$	50

L'aire  $\mathcal{A}(x)$  est donc minimale pour  $x = 10(\sqrt{2}-1)$ .

4. Notons S le point obtenu :  $AS = AF = AC - CF = 10\sqrt{2} - 10$ .

### 24 TP – Recherche d'un volume maximal

2. a) L'aire est égale à  $CD \times AD$  soit  $(10-x) \times 2\sqrt{x}$ .

b)  $g$  est le produit de deux fonctions dérivables sur  $]0; 10[$  :  
 $x \mapsto 2(10-x)$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

$$g'(x) = -2\sqrt{x} + 2(10-x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{10-3x}{\sqrt{x}}$$

donc du signe de  $10-3x$ .

$x$	0	$\frac{10}{3}$	10	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$\frac{40\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$	0

L'aire du rectangle est maximale pour  $x = \frac{10}{3} \approx 3,33$  m.

L'aire de ABCD est alors  $\frac{40\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \approx 24,34$  m<sup>2</sup>.

d) Les dimensions de la salle sont alors égales, en m, à :

$$h = 2\sqrt{\frac{10}{3}}, \ell = \frac{40}{3} \text{ et } L = 20.$$

Le volume maximal est donc de  $\frac{1600\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \approx 974$  m<sup>3</sup>.

## EXERCICES

## Entraînement (page 106)

### DE TÊTE

25  $f'(x) = x^2 + x + 1$ .

26  $f'(x) = 12x^3 + 12x + 5$ .  
 $f'(1) = 29$ .

27  $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ .  
 $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

28  $f'(x) = x^2 - 1$ .  
 $f'(x) \leq 0$  pour  $x \in [-1; 1]$  donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle.

29  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[-2; 0]$ , donc  $f(x) \in [-10; 0]$ .

30  $f'(x) = -2x + 2$ .

$x$	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			0	1	-3

Donc  $f(x) \in [-3; 1]$ .

### OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

31  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = -x^3 + 9x^2 - 4x + 4$ .

32  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$   
et  $f'(x) = 3(x+1)^2 + 2(x+1)(3x-1) = (x+1)(9x+1)$ .

33  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$   
et  $f'(x) = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ .

34  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   
et  $f'(x) = -\frac{3}{4x^2} - \frac{2}{5}$ .

35  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$   
et  $f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}$ .

36 Corrigé dans le manuel.

37  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$   
et  $f'(x) = 2 + \frac{1}{(3-x)^2}$ .

38 1. a)  $f$  et  $g$  sont deux fonctions rationnelles définies sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$ , donc dérivables sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

b)  $f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$  et  $g'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$ .  
Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ,  $f'(x) = g'(x)$ .

2.  $f(x) - g(x) = \frac{3x-2+5}{(x+1)} = \frac{3(x+1)}{x+1}$ .

Or  $x \neq -1$ , donc  $f(x) - g(x) = 3$ .

Il en résulte que  $f'(x) - g'(x) = 0$  soit  $f'(x) = g'(x)$ .

### DÉRIVÉES ET TANGENTES

39  $f'(x) = \frac{1(1-2x) - (x+3)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$ .

$f(-1) = \frac{2}{3}$  et  $f'(-1) = \frac{7}{9}$ , donc la tangente a pour équation  
 $y = \frac{7}{9}(x+1) + \frac{2}{3}$  soit  $y = \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}$ .

40  $f'(x) = 2x + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ;  $f'(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ .  
D'où une équation de la tangente en  $(0; 0)$  :  $y = 0$ .

41  $f'(x) = 4\sqrt{x} + \frac{4x+8}{2\sqrt{x}}$ , soit  $f'(x) = \frac{4x+2x+4}{\sqrt{x}} = \frac{6x+4}{\sqrt{x}}$ .  
 $f(4) = 48$  et  $f'(4) = 14$ .

D'où une équation de la tangente en (4; 48) :  $y = 14(x - 4) + 48$  soit  $y = 14x - 8$ .

**42** 1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 > 0$ .  
Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2. f(a) = \frac{3a}{a^2 + 1}; f'(a) = \frac{3 - 3a^2}{(a^2 + 1)^2}$$

D'où une équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  :

$$y = \frac{3 - 3a^2}{(a^2 + 1)^2} (x - a) + \frac{3a}{a^2 + 1}$$

**43** Corrigé dans le manuel.

$$44. f'(x) = 8x^3 - 16x; f(1) = 0 \text{ et } f'(1) = -8.$$

D'où une équation de la tangente en (1; 0) :  $y = -8(x - 1)$  soit  $y = -8x + 8$ .

De plus, pour  $x = 0$ ,  $y = 8$  donc la tangente passe par A.

**45** 1. La courbe semble avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses en deux points.

$$2. f'(x) = x^3 + 3x^2 + x = x(x^2 + 3x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5; \text{ donc } x_1 = -\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

Il y a donc trois points de la courbe ayant une tangente parallèle à l'axe des abscisses : les points d'abscisses 0,  $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{5} - 3}{2}$ .

**46** 1. a)  $f$  est une fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles donc dérivable sur ces intervalles.

$$b) f'(x) = \frac{2(x + 1) - 2x}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}$$

2. Une tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $d$  ( $y = 4x$ ) signifie que :  $\frac{2}{(x + 1)^2} = 4$  soit  $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}$ , soit  $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

3. Une tangente  $T_M$  en un point M d'abscisse  $m \neq -1$  a pour équation  $y = \frac{2}{(m + 1)^2} (x - m) + \frac{2m}{m + 1}$ ,

$$\text{soit } y = \frac{2x}{(m + 1)^2} + \frac{2m^2}{(m + 1)^2}$$

$$A(0; 1) \in T_M \Leftrightarrow 1 = \frac{2 \times 0}{(m + 1)^2} + \frac{2m^2}{(m + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 = 2m^2$$

$$\Leftrightarrow m + 1 = \sqrt{2}m \text{ ou } m + 1 = -\sqrt{2}m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \text{ ou } m = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = -(\sqrt{2} - 1).$$

**47** Corrigé dans le manuel.

$$48. f'(x) = -4x^3 + 4x + 1; f(-1) = 0 \text{ et } f'(-1) = 1.$$

Donc la tangente T a pour équation  $y = 1(x + 1)$  soit  $y = x + 1$ .

On cherche les intersections de T et  $\mathcal{C}$  :

$$-x^4 + 2x^2 + x = x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Donc le point B(1; 2) est un point de  $\mathcal{C}$  et de T.

Cherchons une équation de la tangente T' en B :

$$f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = 1;$$

donc T' a pour équation  $y = 1(x - 1) + 2$ , soit  $y = x + 1$ .

Donc T' = T et T est tangente en B à  $\mathcal{C}$ .

$$49. 1. f'(x) = 3x^2 - 6x + 3.$$

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0.$$

Donc on obtient deux points : A(0; 4) et D(2; 6).

2. Si M(m;  $m^3 - 3m^2 + 3m + 4$ ) est un point de  $\mathcal{C}$ ,

$$f'(m) = 3m^2 - 6m + 3.$$

Donc la tangente en M a pour équation :

$$y = (3m^2 - 6m + 3)(x - m) + m^3 - 3m^2 + 3m + 4$$

$$\text{soit } y = (3m^2 - 6m + 3)x - 2m^3 + 3m^2 + 4.$$

Si la tangente passe par A(0; 4), alors  $4 = -2m^3 + 3m^2 + 4$

$$\text{d'où } m^2(3 - 2m) = 0, \text{ donc } m = 0 \text{ ou } m = \frac{3}{2}.$$

Donc par A passe deux tangentes à  $\mathcal{C}$ , l'une est tangente à  $\mathcal{C}$  en A et l'autre en B  $\left(\frac{3}{2}; \frac{41}{8}\right)$ .

$$50. 1. a) f'(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

$$b) f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 5; y = 5x + 1.$$

$$2. g'(x) = 3x^2 - 4x - 3.$$

$$g(0) = 2 \text{ et } g'(0) = -3; y = -3x + 2.$$

3. On retrouve chaque fois la « partie » affine de la fonction.

$$4. a) P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$P(0) = d \text{ et } P'(0) = c.$$

$$b) y = cx + d.$$

On retrouve donc la propriété de la question 3).

$$5. h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 2; h(0) = 2 \text{ et } h'(0) = 2.$$

On ne retrouve pas la propriété.

## POSITIONS RELATIVES D'UNE COURBE ET D'UNE DE SES TANGENTES

**51** Corrigé dans le manuel.

**52** On cherche les points d'intersection de la droite et de la courbe.

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{3}x - 4 \text{ soit } x^2 - \frac{17}{3}x + 8 = 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{17}{3}\right)^2 - 32 = \frac{17^2 - 9 \times 32}{9} = \frac{1}{9}.$$

Donc il y a deux points d'intersection, d'abscisses respectives :

$$\frac{17}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \text{ et } \frac{17}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

La droite n'est donc pas tangente à la courbe.

**53** 2. a) Il semble y avoir un seul point commun.

$$b) x^2 - x + 1 = \frac{1}{x + 1}, x \neq -1 \text{ équivaut à :}$$

$$x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = 1, \text{ soit } x^3 = 0.$$

Il y a donc un seul point commun : A(0; 1).

3. a) Il semble qu'en A, les courbes aient une tangente commune.

$$b) f'(x) = 2x - 1 \text{ et } g'(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2}; f'(0) = -1 \text{ et } g'(0) = -1.$$

Donc la tangente est commune.

## SENS DE VARIATION

**54**  $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	+	0	-
$f(x)$		↘ -4 ↗		0	↘

**55**  $f'(x) = 2x^2 + \frac{5}{6}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	↗	

**56**  $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + x = x(8x^2 - 9x + 1)$   
 $= x(x-1)(8x-1)$ .

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{8}$	1	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	3	↗	$3 + \frac{10}{8^4}$	↘	$\frac{5}{2}$	↗

**57**  $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ ;  $I = [-6; 0[$ .

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \frac{-2x-8}{x^3} = \frac{-2(x+4)}{x^3}$$

$x$	-6	-4	0	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{7}{9}$	↘	$\frac{3}{4}$	↗

**58**  $f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2}$ .

$x$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	-2	↘

**59**  $f'(x) = \frac{(4x-4)(x^2-2x+6) - (2x-2)(2x^2-4x+4)}{(x^2-2x+6)^2}$   
 $= \frac{2(x-1)(2x^2-4x+12-2x^2+4x-4)}{(x^2-2x+6)^2}$   
 $= \frac{16(x-1)}{(x^2-2x+6)^2}$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$\frac{2}{5}$	↗

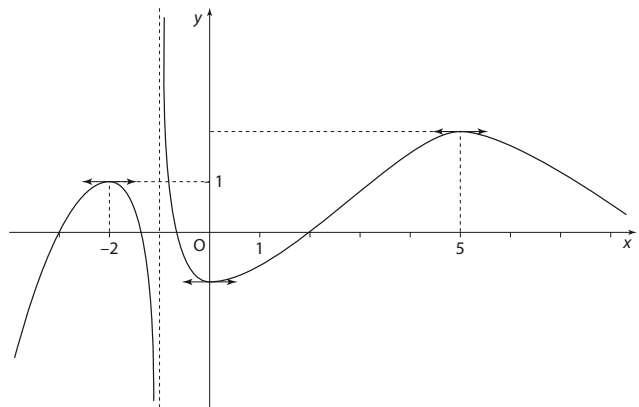
**60**  $f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{3-x}{2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$ .

$x$	0	1	9		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-18

**61** Corrigé dans le manuel.

**62** ①, b; ②, c; ③, a.

**63** 1.  $f$  et  $f'$  sont définies sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .  
 2. Extremums locaux en  $x = -2$ ,  $x = 0$  et  $x = 5$ .  
 3. Courbe possible :



**64** Corrigé dans le manuel.

**65** 1. On ne sait pas si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$ .  
 2.  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .  
 3. On ne peut pas affirmer que  $f$  est strictement croissante. Il peut exister des réels de  $I$  pour lesquels  $f'(x) = 0$ .

**66** 1.  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$ ;  
 $f''(x) = 12x^2 - 12x + 4 = 4(3x^2 - 3x + 1)$ .  
 $\Delta = 9 - 12 < 0$  donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f''(x) > 0$ .

2.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f''(x)$		+		
$f'(x)$		↘	0	↗

3.  $f'(1) = 0$  donc  $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x > 1 \\ f'(x) < 0 \text{ si } x < 1. \end{cases}$

4.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	4	↗

## EXTREMUMS LOCAUX. ENCADREMENTS

**67** 1.  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ .

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ 2 ↗		

**2.** Par lecture du tableau,  $f(x) \geq 2$  pour tout  $x > 0$ .  
D'où le résultat.

**68**  $f'(x) = \frac{(2x+2)(4x^2+1) - (x^2+2x+3)(8x)}{(4x^2+1)^2}$ .

$f'(x) = \frac{-8x^2 - 22x + 2}{(4x^2+1)^2}$ .

$f'(x) = 0$  pour  $x = \frac{\sqrt{137} - 11}{8} \approx 0,09\dots$

Donc il n'y a pas de maximum local en  $x = 0$ .

**69** Corrigé dans le manuel.

**70** 1.  $f'(x) = -4x + 4$ .

$x$	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗ -1 ↘			
		-19		-3	

Le minimum de  $g$  est  $g(1) = -1$ .

## OPTIMISATION

**71** 1. D'après le théorème de Thalès :  $\frac{2r}{16} = \frac{24-h}{24}$

soit  $6r = 48 - 2h$  donc  $h = 3(8 - r)$ .

**2. a)**  $V(x) = \pi r^2 \times 3(8 - r)$

soit  $V(x) = 3\pi r^2(8 - r)$ ,  $r \in [0; 8]$ .

**b)**  $V'(r) = 3\pi[2r(8 - r) - r^2] = 3\pi r(16 - 3r)$ .

$r$	0	$\frac{16}{3}$	8	
$V'(r)$	0	+	0	-
$V(r)$		↗ $\frac{2048}{9}$ ↘		
	0		0	

$r = \frac{16}{3}$ ,  $h = 3\left(8 - \frac{16}{3}\right) = 8$ , soit  $r = \frac{16}{3}$  cm et  $h = 8$  cm.

**72** 1.  $OB = 4$ ,  $OH = h - 4$  avec  $h \in [0; 8]$

et  $BH = r$  avec  $r \geq 0$ .

Avec le théorème de Pythagore :  $OB^2 = OH^2 + BH^2$

$16 = h^2 - 8h + 16 + r^2$

d'où  $r^2 = h(8 - h)$  et  $r = \sqrt{h(8 - h)}$ .

**2.**  $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h^2(8 - h) = \frac{\pi}{3}(8h^2 - h^3)$ .

**3. a)**  $V'(h) = \frac{\pi}{3}(16h - 3h^2) = \frac{\pi}{3}h(16 - 3h)$ ,  $h \in [0; 8]$ .

$h$	0	$\frac{16}{3}$	8	
$V'(h)$	0	+	0	-
$V(h)$		↗ $\frac{8 \times 16^2 \times \pi}{81}$ ↘		
	0		0	

**b)** Le volume est maximal pour  $h = \frac{16}{3}$  cm.

**73** Corrigé dans le manuel.

**74** L'aire est  $xy = 200$ .

La quantité de grillage nécessaire est  $2x + y = 2x + \frac{200}{x}$ .

On pose  $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$ ;

$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2(x+10)(x-10)}{x^2}$ .

$x$	0	10	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ 40 ↗		

Donc le minimum de grillage correspond à 40 m.

**75** 1. M est à la distance  $x$  de A de puissance  $p$ , donc l'intensité est  $\frac{p}{x^2}$ . De même, M est à la distance  $\ell - x$  de B

de puissance  $8p$ , donc l'intensité est  $\frac{8p}{(\ell - x)^2}$ .

Donc  $f(x) = \frac{p}{x^2} + \frac{8p}{(\ell - x)^2}$ .

**2.** Pour tout  $x \in ]0; \ell[$ ,  $f'(x) = \frac{2p(3x - \ell)(3x^2 + \ell^2)}{x^3(\ell - x)^3}$ .

$x$	0	$\frac{\ell}{3}$	$\ell$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ $\frac{27p}{\ell^2}$ ↗		

On place donc M en  $x = \frac{\ell}{3}$ .

**76** 1. a)  $\cos \widehat{BAM} = \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AB}$ ;

donc  $AM^2 = 6x$  et  $AM = \sqrt{6x}$ .

**b)** Le triangle AMB inscrit dans un demi-cercle est rectangle, donc  $(AM) \parallel (HK)$ .

D'après le théorème de Thalès :

$\frac{HK}{AM} = \frac{BH}{BA}$ , donc  $HK = \frac{(6-x)\sqrt{6x}}{6}$  soit  $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$ .

**2. a)**  $f'(x) = \frac{\sqrt{6}}{6} \left[ -\sqrt{x} + \frac{(6-x)}{2\sqrt{x}} \right] = \frac{\sqrt{6}(2-x)}{4\sqrt{x}}$ .

**b)**

$x$	0	2	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ↘		

Donc HK est maximal pour  $x = 2$  et dans ce cas,  $HK = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

**77** 1.  $V = 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ .

**2.**  $h^2 + r^2 = 9$ , donc  $V(h) = \frac{2}{3}\pi h(9 - h^2)$ ,

soit  $V(h) = \frac{2}{3}\pi(9h - h^3)$  avec  $0 \leq h \leq 3$ .

**3. a)**  $V'(h) = \frac{2}{3}\pi(9 - 3h^2) = 2\pi(\sqrt{3} - h)(\sqrt{3} + h)$ .

<b>h</b>	0	$\sqrt{3}$	3
<b>V'(h)</b>		+	0 -
<b>V(h)</b>	0	$4\pi\sqrt{3}$	0

**b)**  $V_0 = 4\pi\sqrt{3}$  est la valeur maximale du volume, obtenue pour  $h = h_0 = \sqrt{3}$  dm.

**4. a)**  $V_0 \approx 21,766$  dm<sup>3</sup>.

**b)**  $h_0 \approx 1,73$  dm et  $r_0 = \sqrt{9 - h_0^2} = \sqrt{6} \approx 2,45$  dm.

**78** 1.  $4c + 3a = 1$  donc  $c = \frac{1 - 3a}{4}$ .

**2. a)** Aire du carré :  $\frac{(1 - 3a)^2}{16}$ .

Aire du triangle équilatéral :  $\frac{1}{2}a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

**b)**  $S(a) = \frac{1 - 6a + 9a^2 + 4a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{16}[(9 + 4\sqrt{3})a^2 - 6a + 1]$ .

**3. a)**  $S(a)$  est minimal pour  $a = \frac{6}{2(9 + 4\sqrt{3})} = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{11}$ .

**b)**  $c = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \left( \frac{9 - 4\sqrt{3}}{11} \right) = \frac{-16 + 12\sqrt{3}}{44} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{11}$ .

Il en résulte que  $\sqrt{3} \times c = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{11} = a$ .

**79** 1.  $(F1)'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2}$ ,

donc  $(F1)'(x)$  est du signe de  $x - 1$  sur I.

<b>x</b>	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
<b>(F1)'(x)</b>		-	0 +
<b>F1(x)</b>	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{13}{6}$

**2. a)** Oui car les cinq signes - correspondent au partage de  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  sur lequel F1 est décroissante et les cinq signes + au partage de  $\left[1; \frac{3}{2}\right]$  sur lequel F1 est croissante.

**b)** I est divisé en 100 intervalles de longueur 0,01 : le taux est strictement inférieur à 0,01 sur  $[1; 1,01]$ .

**80** Volume V restant :  $V(x) = 96x - x^3$ .

$V'(x) = 96 - 3x^2 = 3(32 - x^2) = 3(4\sqrt{2} + x)(4\sqrt{2} - x)$ .

<b>x</b>	0	$4\sqrt{2}$	8
<b>V'(x)</b>		+	0 -
<b>V(x)</b>	0	$256\sqrt{2}$	0

Le volume est maximal pour  $x = 4\sqrt{2}$  cm.

**81** Corrigé dans le manuel.

**82** 1. a)  $f'(x) = 2(x + 3)(3 - x) - (x + 3)^2 = (x + 3)(3 - 3x)$ .

**b)**

<b>x</b>	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		-	0	+	0	-
<b>f(x)</b>			0	27	32	0

**c)** Si  $x \in [0; 3], f(x) \in [0; 32]$ .

**2.**  $MH = \frac{9 - x^2}{2}$  où H est le projeté orthogonal de M sur [AB],  $MN = 2x$  et  $AB = 6$ .

Donc :  $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{9 - x^2}{2} \right) (2x + 6) = \frac{1}{2} (x + 3)(3 - x)(3 + x)$ .

$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} f(x), x \in [0; 3]$ .

L'aire du trapèze est maximale pour  $x = 1$ .

## AVEC LES TICE

**83** 2. a)  $M(m; 4 - m^2), f'(x) = -2x, f'(m) = -2m$ ; donc  $y = -2m(x - m) + 4 - m^2$  soit  $y = -2mx + m^2 + 4$ .

**b)**  $A(0; m^2 + 4)$  et  $B\left(\frac{m^2 + 4}{2m}; 10\right), m \in ]0; 2]$ .

**c)** Aire (OAB) =  $\frac{1}{2} \frac{(m^2 + 4)(m^2 + 4)}{2m} = \frac{(m^2 + 4)^2}{4m}$ .

$f(x) = \frac{x^3}{4} + 2x + \frac{4}{x}$ ;

donc  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x^2 + 4)(3x^2 - 4)}{4x^2}$ .

<b>x</b>	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
<b>f'(x)</b>		-	0 +
<b>f(x)</b>		$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	8

L'aire du triangle est minimale pour  $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Ce résultat est conforme à la conjecture qui affiche 6,16 comme valeur minimale.

## ROC Restitution organisée de connaissances

**84** 1. a)  $u^2$  est de la forme  $uv$  avec  $v = u$ ; donc  $(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$ .

**b)**  $u^3 = u \times u^2$ , de la forme  $uv$  avec  $v = u^2$ ; donc  $(u^3)' = u'u^2 + u \times 2uu' = 3u^2u'$ .

**2. a)**  $f'(x) = 6(3x - 1)$ .

**b)**  $g'(x) = \frac{3}{2} \left( \frac{x}{2} + 3 \right)^2$ .

## Prendre toutes les initiatives

**85** On pose  $f(x) = x^3 + 4x + 11; f'(x) = 3x^2 + 4$ .

La droite a pour coefficient directeur 7, donc la tangente doit avoir 7 pour coefficient directeur :

$3x^2 + 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$ .

Le point A d'abscisse 1 a pour ordonnée 16 et le point B d'abscisse -1 a pour ordonnée 6.

Or A(1; 16) est un point de la droite d'équation  $y = 7x + 9$ , donc cette droite est tangente à la courbe en A(1; 16).

**86**  $f'(x) = 32x^3 - 16x = 16x(2x^2 - 1)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

$\swarrow$  1  $\searrow$  -1  $\nearrow$  1  $\searrow$  -1  $\nearrow$  1  $\swarrow$

D'où l'équivalence :

$$x \in [-1; 1] \Leftrightarrow f(x) \in [-1; 1].$$

## EXERCICES

## Approfondissement (page 113)

**87** 1.  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}, f'(x) = a - \frac{c}{x^2}$ .

$f(1) = -9, f(3) = -5, f'(3) = 0$ . Donc :

$f'(3) = 0$  équivaut à  $a = \frac{c}{9}$  soit  $c = 9a$ ;

$f(1) = -9$  équivaut à  $a + b + c = -9$ ;

$f(3) = -5$  équivaut à  $3a + b + \frac{c}{3} = -5$ .

$$\begin{cases} c = 9a \\ 10a + b = -9 \\ 6a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -9 \end{cases}$$

2. Ainsi :  $f(x) = -x + 1 - \frac{9}{x}$ .

**88** 1. a)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ;

$f(-2) = 5, f(0) = 1$  et  $f'(-2) = f'(0) = 0$ .

Donc :  $f(0) = 1$  équivaut à  $d = 1$ ;

$f'(0) = 0$  équivaut à  $c = 0$ ;

$f'(-2) = 0$  équivaut à  $12a + 4b + c = 0$ ;

$f(-2) = 5$  équivaut à  $-8a + 4b - 2c + d = 5$ .

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a - 4b = 0 \\ -8a + 4b = 4 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ b = 3 \\ a = 1. \end{cases}$$

b) Ainsi :  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$  et  $f'(x) = 3x^2 + 6x$ .

2. a)  $f(1) = 5$  et  $f'(1) = 9$ ; donc T a pour équation :

$y = 9(x - 1) + 5$  soit  $y = 9x - 4$ .

b)  $f'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -3$ .

Ainsi, la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à T au point A(-3; 1).

**3. a)**

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

$\swarrow$  1  $\searrow$  5  $\searrow$  1  $\swarrow$

Si  $x \geq -3$ , alors  $f(x) \geq 1$  donc  $f(x) > 0$ .

b) Si  $x = -3, 1$ , alors  $f(x) = 0, 039$ .

Donc  $f(x) > 0$  n'implique pas  $x \geq -3$ .

**89** 1.

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	-	0	+
$f(x)$					

2. Si  $-1 < a < b < 0$ , alors  $f(a) > f(b)$ .

3.  $-1 < a < b < 2$  : on ne peut pas comparer  $f(a)$  et  $f(b)$ .

4.  $f'(-2) = 0, f'(0) = 0$  et  $x \neq -1$ ; donc  $p = 1$ .

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + m)(x + 1) - x^2 - mx - n}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + m - n}{(x + 1)^2}$$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow m = n; f'(-2) = 0 \Leftrightarrow m = n$ .

On peut donc choisir  $m = n = 0$  et  $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ .

**90** 1. Il semble que pour  $x \in ]2; 6[ \cup ]0; 1[$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

2.  $f'(x) = -2x + 7$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

$\swarrow$   $\frac{33}{4}$   $\searrow$

3. a) et b)  $g'(x) = \frac{x - 1 - (x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{-5}{(x - 1)^2}$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$			

4.  $g(x) - f(x) = \frac{(x + 4) - (x - 1)(-x^2 + 7x - 4)}{x - 1}$

$$g(x) - f(x) = \frac{x + 4 + x^3 - 7x^2 + 4x - x^2 + 7x - 4}{x - 1} = \frac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x - 1}$$

$$g(x) - f(x) = \frac{x(x^2 - 8x + 12)}{(x - 1)} = \frac{x(x - 2)(x - 6)}{(x - 1)}$$

$x$	$-\infty$	0	1	2	6	$+\infty$
$\frac{x}{x-1}$		+ 0 -		+ +		+
$(x-2)(x-6)$		+ +		+ 0 - 0 -		
$g(x)-f(x)$		+ 0 -		+ 0 - 0 +		

$\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  pour  $x \in [0; 1[ \cup [2; 6]$ ;  $\mathcal{C}_g$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_f$  pour  $x \in ]-\infty; 0] \cup ]1; 2] \cup [6; +\infty[$ .

**91** 1. Volume :  $x \times x + h = 128$ ; donc  $h = \frac{128}{x^2}$  (en cm).

2. Prix de revient :

- du fond et du couvercle :  $2x^2 \times 4 = 8x^2$ ;

- des faces latérales :  $4hx \times 2 = \frac{1024}{x}$ .

D'où :  $p(x) = 8x^2 + \frac{1024}{x}$ .

3.  $p'(x) = \frac{16(x^3 - 64)}{x^2}$ .

$x$	0	4	$+\infty$
$p'(x)$		- 0 +	
$p(x)$			384

Le prix de revient est minimal pour  $x = 4$  cm et  $h = 8$  cm.

**92** 1.  $B(x) = -0,2x^2 + 640x - \frac{x^3}{1000} + \frac{x^2}{20} - 40x - 5000$   
 $= -\frac{x^3}{1000} - \frac{3x^2}{20} + 600x - 5000$ .

$B'(x) = -\frac{3x^2}{1000} - \frac{3x}{10} + 600$   
 $= -\frac{3}{1000}[x^2 + 100x - 200000]$   
 $= -\frac{3}{1000}(x-400)(x+500)$ .

$x$	0	400	1000
$B'(x)$		+ 0 -	
$B(x)$	-3000	147000	

2. Bénéfice maximal :  $B(400) = 147000$  €.

**93** 1.  $C_m(x) = 3x^2 - 180x + 2700$ .

$C_M(x) = x^2 - 90x + 2700 + \frac{8836}{x}$ .

2.  $C_M'(x) = 2x - 90 - \frac{8836}{x^2} = \frac{2x^3 - 90x^2 - 8836}{x^2}$ .

Or  $(x-47)(2x^2 + 4x + 188) = 2x^3 - 90x^2 - 8836$ .

D'où le résultat.

3. Pour tout  $x \in [0; 90]$ ,  $2x^2 + 4x + 188 > 0$ .

$x$	0	47	90
$C_M'(x)$		- 0 +	
$C_M(x)$			867

Coût moyen minimal :  $C_M(47) = 867$ ;

$C_m(47) = 3 \times 47^2 - 180 \times 47 + 2700 = 867$ .

D'où le résultat.

**94** 1.  $2x^2y = 576$ , donc  $y = \frac{288}{x^2}$ .

2.  $S(x) = 2xy + 4x^2 + 4xy = 6xy + 4x^2$ .

$S(x) = \frac{1728}{x} + 4x^2$ .

3.  $S'(x) = -\frac{1728}{x^2} + 8x = \frac{8x^3 - 1728}{x^2} = \frac{8(x^3 - 216)}{x^2}$   
 $= \frac{8(x^3 - 6^3)}{x^2} = \frac{8(x-6)(x^2 + 6x + 36)}{x^2}$ .

$x$	3	6	12
$S'(x)$		- 0 +	
$S(x)$	612	432	720

$S(x)$  est minimal pour  $x = 6$ .

**95** 1. a)  $V = \pi x^2 h$ ; donc  $h = \frac{V}{\pi x^2}$ .

b)  $\mathcal{G}(x) = \pi x^2 + 2\pi x h$ .

$\mathcal{G}(x) = \pi x^2 + \frac{2\pi x \times V}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{2V}{x}$ .

2. a)  $\mathcal{G}'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2(\pi x^3 - V)}{x^2}$ .

$x$	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	$+\infty$
$\mathcal{G}'(x)$		- 0 +	
$\mathcal{G}(x)$			

Si  $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$  alors  $h = \frac{Vx}{\pi \times x^3} = \frac{Vx}{\pi \frac{V}{\pi}} = x$ .

D'où le résultat.

**96** 1. a)  $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$ ,  $h \neq 0$ .

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$  donc  $f'(0) = 0$ .

2. a)  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  sont dérivables sur  $]0; +\infty[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

b)  $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ .

3. Il en résulte que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

4. a) Si  $uv$  est dérivable sur  $I$ , alors  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ .

b) Cette implication est fautive.

$f: x \mapsto x\sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  mais  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas dérivable sur cet intervalle.

**97**  $f'(x) = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + 2(x-x_3)$   
 $= 2[3x - (x_1 + x_2 + x_3)]$ .

$f$  admet un minimum pour  $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \bar{x}$ .

Plus généralement :

si  $f(x) = \sum_{i=1}^n (x-x_i)^2$ , alors  $f'(x) = \sum_{i=1}^n 2(x-x_i)$ .

$f'(x)$  s'annule pour  $x = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \bar{x}$  et admet un minimum pour cette valeur.

**98 2. a)**  $f'(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ ;  $f''(x) = x - 2$ .

**b)**

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$-1$	

$f'$  atteint son minimum pour  $x = 2$ .

### Prendre toutes les initiatives

**99**  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

$f(0) = 0$  équivaut à  $d = 0$ ;

$f(1) = 1$  équivaut à  $a + b + c + d = 1$ ;

$f'(0) = 0$  équivaut à  $c = 0$ ;

$f'(1) = 0$  équivaut à  $3a + 2b + c = 0$ .

$$\begin{cases} d = c = 0 \\ a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} d = c = 0 \\ a = -2 \\ b = 3. \end{cases}$$

$f(x) = -2x^3 + 3x^2$ .

**100**  $r^2 + \frac{h^2}{4} = 16$ ,

donc  $r^2 = 16 - \frac{h^2}{4}$ .

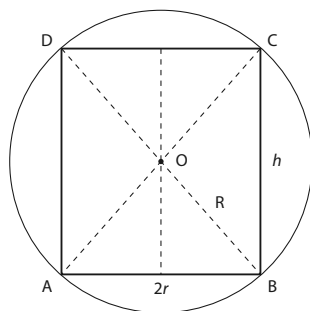
Volume du cylindre :

$V(h) = \pi r^2 h = \pi h \left( 16 - \frac{h^2}{4} \right)$

$V(h) = \frac{\pi}{4} (64h - h^3)$ ,

$h \in [0; 8]$ .

$V'(h) = \frac{\pi}{4} (64 - 3h^2)$ .



$h$	$0$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$16$
$V'(h)$	$+$	$0$	$-$
$V(h)$	$0$	$\frac{256\pi\sqrt{3}}{9}$	$0$

Le volume est maximal pour  $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .

**101**  $\tan^2 \alpha = \frac{OH^2}{HA^2}$   
 $= \frac{r^2}{(h-r)^2 - r^2} = \frac{r^2}{h^2 - 2hr}$

et  $\tan^2 \alpha = \frac{KB^2}{AK^2} = \frac{R^2}{h^2}$ .

Donc :  $\frac{r^2}{h(h-2r)} = \frac{R^2}{h^2}$ ,

soit  $R^2 = \frac{hr^2}{h-2r}$ .

Donc  $V(h) = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

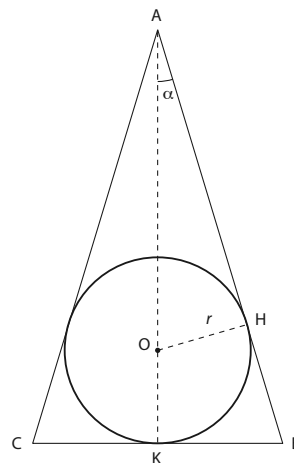
$= \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2}{h-2r}$ .

$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2}$ .

Ainsi le volume est minimal pour  $h = 4r$ .

On a alors :  $R = r\sqrt{2}$ .

Or  $r = 6$  cm; donc  $h = 24$  cm et  $R = 6\sqrt{2}$  cm.



## EXERCICES

## Travail en autonomie (page 116)

**A**  $f'(x) = x^2 - 2x$ .

Les points d'abscisse  $x_0$  de  $\mathcal{C}$  en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3 sont tels que  $f'(x_0) = 3$ , soit  $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$ , soit  $x_0 = -1$  ou  $x_0 = 3$ .

On obtient les points A  $\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$  et B  $(3; 0)$ .

**B 1.**  $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$ .

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 4x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

On obtient les points A  $(0; 0)$ , B  $(1; 2)$  et C  $(-1; 0)$ .

**2.** La tangente en B a pour équation  $y = 1(x-1) + 2$  soit  $y = x + 1$ . Or C appartient à cette tangente, donc (BC) est tangente commune.

**C 1.**  $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$ ;  $f''(x) = -3x + 3$ .

$x$	$0$	$1$	$2$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$0$	$\frac{3}{2}$	$0$

Donc l'affirmation est vraie.

**2.**  $f'(2) = 0$  donc la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $x = 2$  est horizontale.

**3.**

$x$	$-1$	$0$	$2$	$3$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$4$	$2$	$4$	$2$

Donc 4 est un maximum local.

**4.** Réponse vraie.

**D 1.**  $f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$\frac{4}{3}$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$		$7$	$4$	$\frac{140}{27}$	$4$	

Du tableau, il résulte que si  $x \in \left[-1; \frac{4}{3}\right]$ ,  $f'(x) \in [4; 7]$ .

**2.** La réciproque est fautive.

Contre-exemple :  $f(2) = 4$  et  $2 \notin \left[-1; \frac{4}{3}\right]$ .

**E 1. a)**  $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{b+c} = 0 \quad (1)$

$f(-1) = -2 \Leftrightarrow \frac{1-a}{c-b} = -2 \quad (2)$

$f(2) = 4 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{2b+c} = 4 \quad (3)$

**b)** De (1), on déduit que  $a = -1$ , donc (2) et (3) deviennent

$$\begin{cases} c - b = -1 \\ 2b + c = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ soit } b = \frac{1}{4} \text{ et } c = -\frac{3}{4}.$$

$$f(x) = \frac{-x+1}{x-3} = \frac{4(1-x)}{x-3}.$$

**2.**  $f'(x) = \frac{4[-x+3-1+x]}{(x-3)^2} = \frac{8}{(x-3)^2}.$

$f'(1) = 2$ , donc la tangente en A a pour coefficient directeur 2.

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2 - 4}{-1 - 2} = 2,$$

donc la tangente en A est parallèle à (BC).

**F 1.**  $AO^2 = 144 - h^2$  et  $AB = AO\sqrt{2}$ ,  
soit  $AB = \sqrt{2(144 - h^2)}$ .

**2. a)**  $V(h) = \frac{1}{3}AB^2 \times h = \frac{2}{3}h(144 - h^2)$

$V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + 96h, h \in [0; 12].$

**b)**  $V'(h) = -2h^2 + 96 = 2(48 - h^2) = 2(4\sqrt{3} + h)(4\sqrt{3} - h).$

<b>h</b>	0	$4\sqrt{3}$	12	
<b>V'(h)</b>		+	0	-
<b>V(h)</b>	0	$\nearrow 256\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Le volume est maximal pour  $h = 4\sqrt{3}$  cm

et  $V(4\sqrt{3}) = 256\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>.

**G 1.**  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - a.$

$\Delta = 4b^2 + 3a^2 > 0$  donc deux extremums locaux.

**2. a)**  $f(x) = x^3 + x^2 - x; f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$

<b>x</b>	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
<b>f'(x)</b>		+	0	-	0	+
<b>f(x)</b>		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

**b)** Si  $x \in [-1; 1]$ , alors  $f(x) \in \left[-\frac{5}{27}; 1\right] \subset [-1; 1].$

La réciproque est fausse, car, par exemple :

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8} \in [-1; 1]$  et  $-\frac{3}{2} \notin [-1; 1].$