CHAPITRE 3

Dérivation

ACTIVITÉ (page 73)

Activité

2 **b)** Le coefficient directeur semble « s'approcher » de $m = 3$.

3 **a)** L'équation réduite de la droite d : $y = 3x - 2$.

c) La droite d semble tangente en A à la parabole $\mathcal{P}$.

4 **b)** Le coefficient directeur de la tangente est 3. Cela confirme la conjecture faite précédemment.

PROBLÈME OUVERT

Par lecture graphique : en A de coordonnées (3 ; 0).
Par le calcul, après assimilation du chapitre.
La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(t) = 1 + \dfrac{1}{t}$ est dérivable en $t = 1$, et $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.

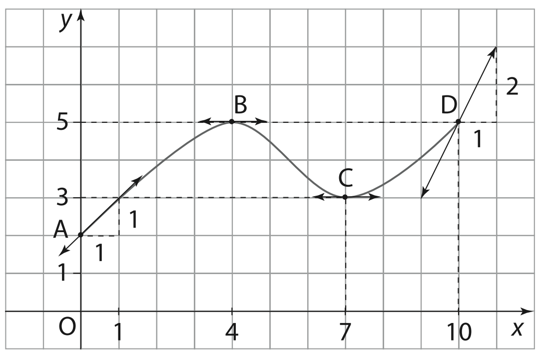
L'équation réduite de la tangente en P est :
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = -x + 3$. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3.

EXERCICES Application (page 77)

1 La tangente en A(–3 ; –1) passe par C(–2 ; 1),
donc le coefficient directeur $m = \dfrac{1+1}{-2+3} = 2$;
donc $f'(-3) = 2$.
La tangente B(1 ; 2) passe par D(3 ; 1),
donc $m = \dfrac{1-2}{3-1} = -\dfrac{1}{2}$;
donc $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

2 Le coefficient directeur de (AB) est $m = \dfrac{-1-3}{4-2} = -2$;
donc $f'(2) = -2$.

3

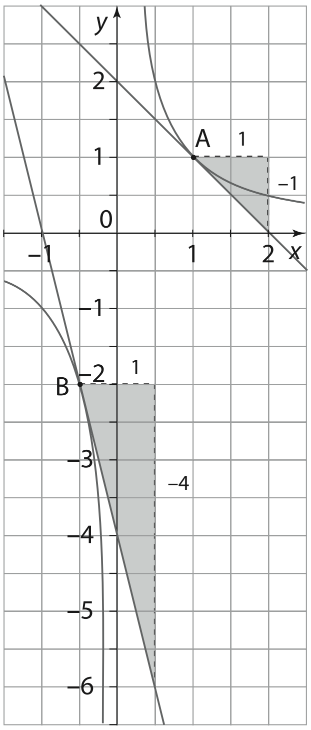


4 **1. a)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

donc :

$f'(1) = -1$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$.

b) Voir figure ci-contre.



2. Tangente en A :

$y = -1(x-1) + 1$

soit $y = -x + 2$.

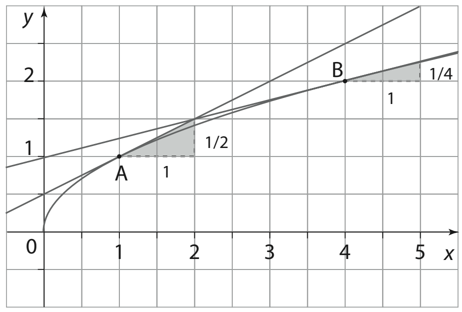
Tangente en B :

$y = -4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - 2$

soit $y = -4x - 4$.

5 **1. a)** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; donc : $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

b)



2. Tangente en A : $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.

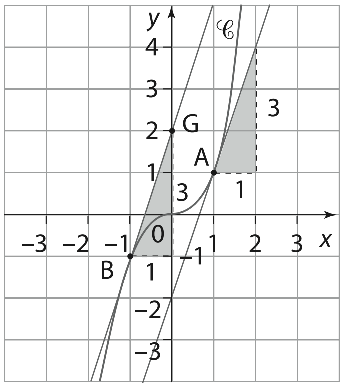
Tangente en B : $y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2$ soit $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

6 **1.** $f'(x) = 3x^2$;

donc :

$f'(1) = 3$ et $f'(-1) = 3$.

2. Voir figure ci-contre.



3. a) Les deux tangentes semblent parallèles.

b) $f'(1) = f'(-1) = 3$.

Les deux tangentes ont le même coefficient directeur, donc elles sont bien parallèles.

EXERCICES Activités de recherche (page 80)

11 **Tangentes à une courbe passant par un point**

• ***Les outils :***

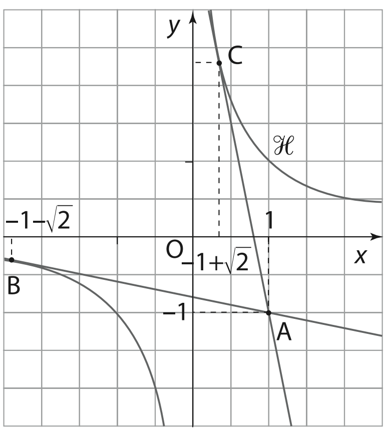
– Équation d'une tangente.

– Résolution d'une équation du second degré.

• ***L'objectif :***

– Savoir déterminer les tangentes à une courbe issues d'un point.

1. a)



b) Il semble y avoir deux tangentes.

2. a) $M\left(m ; \dfrac{1}{m}\right)$; $m \neq 0$.

La tangente en M à $\mathscr{H}$ a pour équation :

$y = -\dfrac{1}{m^2}(x-m) + \dfrac{1}{m}$ soit $y = -\dfrac{1}{m^2}x + \dfrac{2}{m}$.

b) Dire que la tangente en M passe par A équivaut à dire que $-1 = -\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{2}{m}$ soit $m^2 + 2m - 1 = 0$.

c) $\Delta = 4 + 4 = 8$; $m_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $m_2 = -1 + \sqrt{2}$.

On trouve donc deux tangentes, respectivement en :

$B(-1-\sqrt{2} ; 1-\sqrt{2})$ et $C(\sqrt{2}-1 ; \sqrt{2}+1)$.

12 **Tangentes communes à deux points**

• ***Les outils :***

– Courbes de fonctions de référence.

– Équation d'une tangente.

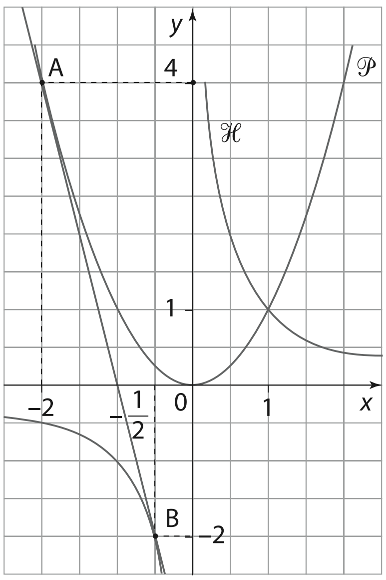
– Condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient confondues.

– Résolution d'un système 2 × 2 non linéaire.

• ***Les objectifs :***

– Savoir déterminer les tangentes communes à deux courbes.

– Savoir résoudre un système 2 × 2 non linéaire.

1. a) 

b) Il semble n'y avoir qu'une seule tangente commune.

2. a) $A(a\,;a^2)$ et $B\left(b\,;\dfrac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$.

Tangente T_a : $y = 2a(x - a) + a^2$ soit $y = 2ax - a^2$.

Tangente T_b : $y = -\dfrac{1}{b^2}x + \dfrac{2}{b}$.

b) $T_a = T_b$ équivaut à $\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} & (1) \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} & (2) \end{cases}$

c) De (2), on tire $b = -\dfrac{2}{a^2}$ et en reportant dans (1) :

$2a = -\dfrac{a^4}{4}$ soit $a(8 + a^3) = 0$, $a \neq 0$, ce qui donne $a^3 = -8$, donc $a = -2$. Il en résulte que $b = -\dfrac{1}{2}$.

Il existe donc une unique tangente, (AB) avec $A(-2\,;4)$ et $B\left(-\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$.

13 Position d'une courbe et d'une tangente en l'un de ses points

• ***Les outils :***

– Équation d'une tangente.

– Tableau de signe.

• ***Les objectifs :***

– Savoir résoudre une inéquation du second degré.

– Savoir déterminer la position relative d'une courbe et d'une de ses tangentes.

1. a) $f'(x) = 3x^2$.

Donc la tangente en $A(1\,;1)$ a pour équation :

$y = 3(x - 1) + 1$, soit $y = 3x - 2$.

Donc : $g : x \mapsto 3x - 2$.

b) $f(x) - g(x) > 0$ équivaut à $x^3 - 3x + 2 > 0$.

2. a) $(x - 1)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x + 2$
$= x^3 - 3x + 2$.

b) Signe de $x^2 + x - 2$: $\Delta = 9$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$,

donc $x^2 + x - 2 < 0$ si $x \in\ ]-2\,;1[$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$		–		–	0	+	
$x^2 + x - 2$		+	0	–	0	+	
$f(x) - g(x)$		–	0	+	0	+	

c) $x^3 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ et $x \neq 1$.

d) Si $x > -2$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

Si $x < -2$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T.

14 Narration de recherche

Pour le profil gauche de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$f(-6) = 0$; $f(-4) = 7$; $f'(-4) = 3$.

Donc (S) $\begin{cases} 36a - 6b + c = 0 & (1) \\ 16a - 4b + c = 7 & (2) \\ -8a + b = 3 & (3) \end{cases}$

qui équivaut à $\begin{cases} 36a - 6b + c = 0 & (4) \\ 20a - 2b = -7 & (5) \\ -8a + b = 3 & (6) \end{cases}$

Avec (5) et (6) : $4a = -1$; d'où : $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = 1$ et $c = 15$.

Donc : $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x + 15$.

La hauteur totale de la voûte est 15 m, correspondant à $f(0)$.

15 Narration de recherche

La tangente en un point quelconque $M\left(m\,;\dfrac{1}{4}m^2 + 2\right)$ a pour équation :

$y = \dfrac{m}{2}(x - m) + \dfrac{1}{4}m^2 + 2$ soit $y = \dfrac{mx}{2} + 2 - \dfrac{m^2}{4}$.

La tangente passe par $P(2\,;0)$ si et seulement si :

$$0 = m + 2 - \frac{m^2}{4} \text{ soit } m^2 - 4m - 8 = 0.$$

$\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})^2$;

$m_1 = \dfrac{4 + 4\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$ et $m_2 = 2 - 2\sqrt{3}$.

Donc $A(2 - 2\sqrt{3}\,;6 - 2\sqrt{3})$ et $B(2 + 2\sqrt{3}\,;6 + 2\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{AP}(2\sqrt{3}\,;-6 + 2\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{BP}(-2\sqrt{3}\,;-6 - 2\sqrt{3})$.

$AP \approx 4{,}3\ldots$ $BP \approx 10{,}1\ldots$

L'unité graphique représentant 25 m, il aperçoit la voiture à environ 100 m de lui et la perd de vue à 250 m.

16 TP – Tangentes à une parabole et à une hyperbole

3. a) $A(1\,;1)$.

T_1 : $y = -1(x - 1) + 1$ soit $y = -x + 2$.

T_2 : $y = 2(x - 1) + 1$ soit $y = 2x - 1$.

• Coordonnées de B :

$-x + 2 = x^2$ soit $x^2 + x - 2 = 0$, donc $x = 1$ et $x = -2$; d'où $B(-2\,;4)$.

• Coordonnées de C :

$2x - 1 = \dfrac{1}{x}$ soit $2x^2 - x - 1 = 0$, donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$;

d'où $C\left(-\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$.

• Équation de (BC) :

le coefficient directeur est : $\dfrac{4 + 2}{-2 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{6}{-\dfrac{3}{2}} = -4$;

donc (BC) a pour équation $y = -4x - 4$.

b) Si $f : x \mapsto x^2$, $f'(-2) = -4$, et si $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$.

Ainsi (BC) est tangente aux deux courbes.

17 TP – Vérifier des résultats avec la calculatrice

1. $f'(x) = 4x - 3$

2. $f(2) = 1$ et $f'(2) = 5$.

Équation réduite de la tangente : $y = 5x - 9$.

DE TÊTE

18 **1.** $f(2) = 4$; $f'(2) = 4$.
2. La réponse est oui.
$y = f'(2)\,(x - 2) + f(2) = 4(x - 2) + 4$, soit $y = 4x - 4$.

19 **a)** Vraie : $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$.
b) Vraie : $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$ donc $y = 3x - 2$.

20 $f'(x) = 6x - 5$; donc $f'(0) = -5$.

21 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$.

NOMBRE DÉRIVÉ

22 $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{\frac{-1}{1-h} + 1}{h} = \dfrac{-h}{h(1-h)} = \dfrac{-1}{1-h}$.
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{1-h} = -1$, donc $f'(-1) = -1$.

23 $f(2+h) = (2+h)^2 - 5(2+h) + 3 = h^2 - h - 3$;
$f(2) = 4 - 10 + 3 = -3$.
$\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h - 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} (h - 1) = -1$; donc $f'(2) = -1$.

24 $f'(2) = 12$.

25 $f'(2) = 1$.

26 $f(a+h) = (a+h)^3 - 3(a+h)$
$= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a - 3h$;
$f(a) = a^3 - 3a$.
$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3a^2 - 3 + 3ah + h^2$;
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3a^2 - 3$, donc $f'(a) = 3a^2 - 3$.

27 $f'(a) = -\dfrac{3}{a^2}$.

28 **1.** $f(1+h) = 1 + h - \dfrac{1}{1+h} = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{1+h}$,
soit $f(1+h) = \dfrac{2h + h^2}{1+h}$.
2. $f(1) = 0$,
donc $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2+h}{1+h}$;
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2+h}{1+h} = 2$, donc $f'(1) = 2$.

29 *Corrigé dans le manuel.*

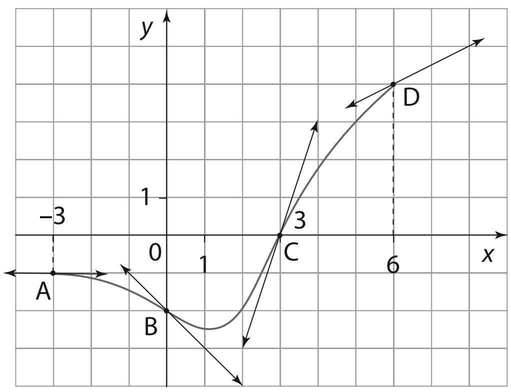
30 **a)** $f'(1) = \dfrac{1}{3}$.
b) $f'(1) = 0$.
c) $f'(1) = 0$.
d) $f'(1) = -1$.

TANGENTE ET NOMBRE DÉRIVÉ

31 $f'(-2) = 0$; $f'(1) = -3$; $f'(3) = -\dfrac{2}{3}$; $f'(5) = 4$.
Tangente en A : $y = 6$.
Tangente en B : $y = -3(x - 1) + 2$ soit $y = -3x + 5$.
Tangente en C : $y = -\dfrac{2}{3}(x - 3) - 2$ soit $y = -\dfrac{2}{3}x$.
Tangente en D : $y = 4(x - 5) + 1$ soit $y = 4x - 19$.

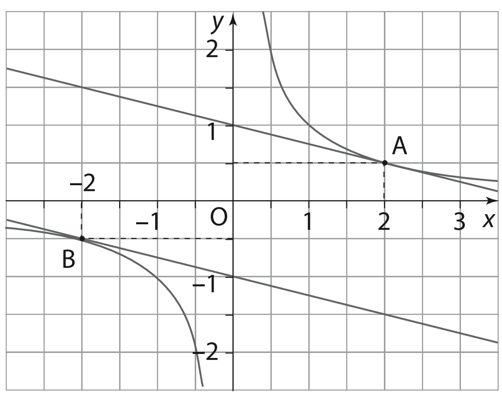
32 *Corrigé dans le manuel.*

33



34 **1.** $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $h'(2) = h'(-2) = -\dfrac{1}{4}$.
$h(2) = \dfrac{1}{2}$; $h(-2) = -\dfrac{1}{2}$.
• Tangente au point d'abscisse 2 :
$y = -\dfrac{1}{4}(x - 2) + \dfrac{1}{2}$ soit $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.
• Tangente au point d'abscisse -2 :
$y = -\dfrac{1}{4}(x + 2) - \dfrac{1}{2}$ soit $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$.

2. a)



b) Les tangentes sont parallèles et symétriques par rapport à O.

35 $f'(-2) = -7$ et $f(2) = 0$;
donc $y = -7(x - 2)$ soit $y = -7x + 14$.

36 $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x - 7)$ donc $f'(5) = \dfrac{3}{2}$, et $f(5) = -\dfrac{5}{2}$;
donc $y = \dfrac{3}{2}(x - 5) - \dfrac{5}{2}$ soit $y = \dfrac{3}{2}x - 10$.

37 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(9) = \dfrac{1}{6}$, et $f(9) = 3$;
donc : $y = \dfrac{1}{6}(x - 9) + 3$ soit $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{2}$.

38 $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$, et $f(2) = 8$;
donc : $y = 12(x - 2) + 8$ soit $y = 12x - 16$.

39 $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$; $f'(x) = 8x + 4$; $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$;
donc $y = 4x + 1$.

40 *Corrigé dans le manuel.*

41 Une tangente en x_0 a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette tangente est parallèle à $d(y = x)$ si et seulement si $f'(x_0) = 1$, soit $2x_0 - 2 = 1$, c'est-à-dire $x_0 = \dfrac{3}{2}$.
Il existe un seul point : le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{17}{4}\right)$.

42 **1.** $\mathscr{C}_1$ représente g et $\mathscr{C}_2$ représente f.
2. a) Les points communs ont pour abscisses les solutions de l'équation : $x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2$
soit $2x^2 - 4x + 2 = 0$ ou encore $2(x - 1)^2 = 0$.
Il y a un seul point commun : A(1 ; 3).
b) $f'(1) = 4$; $g'(1) = 4$; $f(1) = g(1) = 3$.
Ces courbes ont donc une tangente commune d'équation $y = 4(x - 1) + 3$ soit $y = 4x - 1$.

43 **a)** Si $f'(x) = 2x$, alors $f(x) = x^2 + 10$.
b) Si $f(x) = x^2 + 20$, on a aussi $f'(x) = 2x$.

44

```
▼ VARIABLES
  ├ a EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ t EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ h EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ n EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ LIRE a
  ▼ POUR n ALLANT_DE 2 A 10
      ├ DEBUT_POUR
      ├ h PREND_LA_VALEUR pow(10,-n)
      ├ t PREND_LA_VALEUR (F1(a+h)-F1(a))/h
      ├ AFFICHER t
      └ FIN_POUR
└ FIN_ALGORITHME
```

45 *Corrigé dans le manuel.*

46 **1.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
$f'(a) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 4 \Leftrightarrow a = 16$.
2. Le point A d'abscisse 16 a pour ordonnée 4 et $f'(16) = \dfrac{1}{8}$.
Donc la tangente en A a pour équation $y = \dfrac{1}{8}(x - 16) + 4$ soit $y = \dfrac{1}{8}x + 2$.

47 **1.** A(2 ; 4) ; H(0 ; 4) ; H'(0 ; –4).
2. La droite (AH') a pour coefficient directeur 4.
Or $f'(x) = 2x$ et $f'(2) = 4$.
Donc la tangente en A est la droite (AH').

48 **1.** $f(3) = -6$ et $f'(3) = -8$;
$y = -8(x - 3) - 6$ soit $y = -8x + 18$.
2. a) $f(x) - (-8x + 18) = -2x^2 + 4x + 8x - 18$,
soit $-2x^2 + 12x - 18 = -2(x^2 - 6x + 9) = -2(x - 3)^2$.
Il en résulte que $f(x) - (-8x + 18) \leqslant 0$.
b) La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

49 *Corrigé dans le manuel.*

50 **1.** A $\in \mathscr{C}$ donc $f(3) = 2$.
La droite d a pour coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$, donc $f'(3) = \dfrac{2}{3}$.
2. $f(3) = 2$ équivaut à $9a + c = 2$;
$f'(3) = \dfrac{2}{3}$ équivaut à $6a = \dfrac{2}{3}$.
Donc $a = \dfrac{1}{9}$ et $c = 1$, et $f(x) = \dfrac{1}{9}x^2 + 1$.

51 **1.** O $\in \mathscr{C}$ donc $f(0) = 0$; A $\in \mathscr{C}$ donc $f(2) = 3$.
La droite d a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$, donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
2. a) $f(0) = 0$ équivaut à $c = 0$;
$f(2) = 3$ équivaut à $4a + 2b + c = 3$;
$f'(0) = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $b = \dfrac{1}{2}$.
Donc $4a + 1 = 3$, $a = \dfrac{1}{2}$.
b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

52 $\mathrm{M}\left(t_0 ; \dfrac{1}{t_0}\right)$.
La tangente en M a pour équation :
$y = -\dfrac{1}{t_0^2}(t - t_0) + \dfrac{1}{t_0}$, soit $y = -\dfrac{1}{t_0^2}t + \dfrac{2}{t_0}$.
La tangente passe par A(4 ; 0) si et seulement si :
$0 = -\dfrac{4}{t_0^2} + \dfrac{2}{t_0}$ c'est-à-dire $0 = \dfrac{-4 + 2t_0}{t_0^2}$ soit $t_0 = 2$.
Donc $\mathrm{M}\left(2 ; \dfrac{1}{2}\right)$.

53 **1.** $\mathrm{A}(a ; 4a^2)$ est le point de $\mathscr{P}$ et $\mathrm{B}\left(a ; \dfrac{1}{a}\right)$ le point de $\mathscr{H}$.
$\mathrm{T_A}$ a pour équation :
$y = 8a(x - a) + 4a^2$ soit $y = 8ax - 4a^2$.
$\mathrm{T_B}$ a pour équation :
$y = -\dfrac{1}{a^2}(x - a) + \dfrac{1}{a}$ soit $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
Ces tangentes sont parallèles si et seulement si $8a = -\dfrac{1}{a^2}$ c'est-à-dire $a^3 = -\dfrac{1}{8}$ soit $a = -\dfrac{1}{2}$.
2. $\mathrm{T_A}$ a donc pour équation $y = -4x - 1$ et $\mathrm{T_B}$ a pour équation $y = -4x - 4$.

AVEC LES TICE

54 **2. Démontrer**
1. a) $\mathrm{M}(m ; m^2)$;
donc $y = 2m(x - m) + m^2$ soit $y = 2mx - m^2$.
b) Pour A, $m = -1$, donc une équation de la tangente en A est $y = -2x - 1$.
c) J a pour coordonnées $\left(\dfrac{m - 1}{2} ; \dfrac{m^2 + 1}{2}\right)$.

L'abscisse de I est solution de $2mx - m^2 = -2x - 1$ soit $2x(m+1) = (m+1)(m-1)$;

or $m \neq -1$ donc $x = \dfrac{m-1}{2}$ et $y = -m + 1 - 1 = -m$.

I a pour coordonnées $\left(\dfrac{m-1}{2} ; -m\right)$.

2. a) Donc N a pour coordonnées $\left(\dfrac{m-1}{2} ; \dfrac{(m-1)^2}{4}\right)$.

b) $y_N = x_N^2$ donc $N \in \mathcal{P}$.

c) La tangente en N a pour coefficient directeur :

$$f'\left(\frac{m-1}{2}\right) = m - 1.$$

De plus, la droite (AM) a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{m^2-1}{m+1} = m - 1.$$

Donc la tangente en N est parallèle à (AM).

ROC Restitution organisée de connaissances

55 **1.** La tangente T_A en A a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Dire que $O \in T_A$ équivaut à $0 = f'(a)(-a) + f(a)$ soit :

$$f(a) = af'(a).$$

2. $f'(x) = 4x - 3$.

La tangente en A d'abscisse a passe par O si et seulement si $2a^2 - 3a + 1 = a(4a-3)$ (E).

(E) $\Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 - 4a^2 + 3a = 0$

$\Leftrightarrow -2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(a) = 2\sqrt{2} - 3$;

si $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(a) = -2\sqrt{2} - 3$.

Les tangentes ont donc pour équations :

$$y = (2\sqrt{2} - 3)x \quad \text{et} \quad y = -(2\sqrt{2} + 3)x.$$

Prendre toutes les initiatives

56 Soit $M\left(m ; \dfrac{1}{m}\right)$ un point de $\mathcal{H}$, $m \neq 0$.

La tangente T_M en M a pour équation :

$y = -\dfrac{1}{m^2}(x - m) + \dfrac{1}{m}$, soit $y = -\dfrac{1}{m^2}x + \dfrac{2}{m}$.

• Il existe un point M de $\mathcal{H}$ tel que T_M passe par A(1 ; –1) signifie qu'il existe un nombre m non nul tel que :

$-1 = -\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{2}{m}$ soit $m^2 + 2m - 1 = 0$.

$\Delta = 8$; $m_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $m_2 = -\sqrt{2} - 1$.

Donc par A, il passe deux tangentes à $\mathcal{H}$, d'équations $y = -(3 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} + 2$ et $y = -(3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2}$.

• En raisonnant de même pour B(1 ; 2), on obtient l'équation

$$2m^2 - 2m + 1 = 0.$$

$\Delta = -4$. Donc par B, il ne passe aucune tangente à $\mathcal{H}$.

• Pour C(2 ; 0), on obtient $2m - 2 = 0$; donc $m = 1$.

Donc par C, il passe une et une seule tangente à $\mathcal{H}$, d'équation $y = -x + 2$.

57 **1.** L'aire du rectangle est $xy = 16$, donc M appartient à l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{16}{x}$.

2. a) P a pour coordonnées $X = \dfrac{x}{2}$ et $Y = \dfrac{y}{2}$;

donc $XY = \dfrac{xy}{2} = 4$.

Et P appartient à $\mathcal{H}_1$ d'équation $y = \dfrac{4}{x}$, $x > 0$.

b) La tangente en P a pour équation $Y = -\dfrac{16}{x^2}\left(X - \dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{8}{x}$

soit $Y = -\dfrac{16}{x^2}X + \dfrac{16}{x}$.

Or cette tangente coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\dfrac{16}{x}$, donc en K, et l'axe des abscisses au point d'abscisse x, soit en K. D'où le résultat.

EXERCICES Approfondissement (page 88)

58 $f'(x) = x - 2$ et M a pour coordonnées $\left(a ; \dfrac{1}{2}a^2 - 2a + 3\right)$.

Donc la tangente en M a pour équation :

$y = (a-2)(x-a) + \dfrac{1}{2}a^2 - 2a + 3$ soit $y = (a-2)x - \dfrac{1}{2}a^2 + 3$.

$A(0 ; -3) \in T_M \Leftrightarrow -3 = -\dfrac{1}{2}a^2 + 3 \Leftrightarrow a^2 = 18$

$\Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$ ou $a = -3\sqrt{2}$.

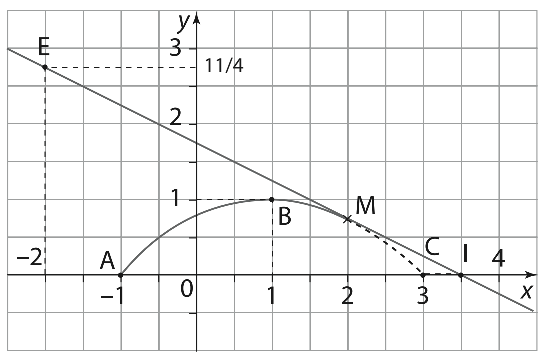
59 **1.** Les points de coordonnées (–1 ; 0) et (3 ; 0) sont des points de la représentation graphique de f, donc $f(-1) = 0$.

De plus, $f(1) = 1$.

Donc $f(x)$ est de la forme $a(x+1)(x-3)$ avec $1 = a(2)(-2)$ soit $a = -\dfrac{1}{4}$.

Ainsi $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

2. a)



Les points du sol et de la colline qui ne sont pas visibles depuis E sont ceux de l'arc de courbe $\overset{\frown}{MC}$ et du segment [CI] (pointillés noirs).

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

La tangente en un point quelconque d'abscisse a a pour équation :

$$y = \frac{1}{2}(1 - a)x + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}.$$

E est un point de la tangente équivaut à :

$\frac{11}{4} = -1 + a + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}$ soit $\frac{1}{4}a^2 + a - 3 = 0$.

$\Delta = 4$; d'où $a_1 = 2(-1 + 2) = 2$ et $a_2 = -6$.

Or $a > -2$, donc on prend $a = 2$ et la tangente en M passant par E a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

Elle coupe le sol en $\mathrm{I}\left(\frac{7}{2} ; 0\right)$ et M a pour coordonnées $\left(2 ; \frac{3}{4}\right)$.

60 **1.** Il semble passer deux tangentes par A.

2. La tangente T en $\mathrm{M}(m ; m^2)$ a pour équation : $y = 2mx - m^2$.

3. $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$ est un point de T équivaut à $-2 = m - m^2$ soit

$$m^2 - m - 2 = 0.$$

4. $m^2 - m - 2 = 0$ a pour solutions $m = -1$ et $m = 2$.

Donc les tangentes ont pour équations respectives :

$$y = -2x - 1 \text{ et } y = 4x - 4.$$

Ces droites sont tangentes à $\mathscr{P}$ respectivement en $\mathrm{M}_1(-1 ; 1)$ et $\mathrm{M}_2(2 ; 4)$.

61 **1.** L'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$ a une équation de la forme $y = ax^2$.

Le point I a pour coordonnées $(3 ; 1)$.

Donc $1 = 9a$ soit $a = \frac{1}{9}$.

Ainsi l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AI}}$ a pour équation $y = \frac{1}{9}x^2$.

• La courbe passe par B(6 ; 2), la tangente en B est horizontale et la courbe passe par I(3 ; 1).

Donc : $f(6) = 2$; $f'(6) = 0$; $f(3) = 1$.

$$\begin{cases} 36a + 6b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 1 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = -2. \end{cases}$$

Donc l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ a pour équation : $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$.

2. La fonction f est donc définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{9}x^2 & \text{si } x \in [0 ; 3] \\ f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x - 2 & \text{si } x \in [3 ; 6]. \end{cases}$$

62 **1.** $\mathrm{A}(a ; a^2)$; donc $\mathrm{T}_a : y = 2ax - a^2$.

$\mathrm{B}(b ; b^2 + 2ab + 3)$; donc $\mathrm{T}_b : y = 2(b + 1)x - b^2 + 3$.

2. $\mathrm{T}_a = \mathrm{T}_b$ si et seulement si $a = b + 1$ et $a^2 = b^2 - 3$ (1).

3. (1) $\Leftrightarrow a = b + 1$ et $(b + 1)^2 = b^2 - 3$

$\Leftrightarrow b = -2$ et $a = -1$.

Ainsi d a pour équation $y = -2x - 1$.

63 **1.** $(x + 1)(x^2 - x - 2) = x^3 - x^2 - 2x + x^2 - x - 2$

$= x^3 - 3x - 2$.

2. a) $\frac{1}{2}(x^2 - 3) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 3x = 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$.

$x^2 - x - 2$ a pour solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$; $x + 1 = 0$ pour $x = -1$.

Donc $\mathrm{A}(-1 ; -1)$ et $\mathrm{B}\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

b) $f'(-1) = -1$ et $g'(-1) = -1$.

Donc la tangente est commune en A.

c) $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) - \frac{1}{x} = \frac{(x + 1)^2(x - 2)}{2x}$.

$(x + 1)^2 \geqslant 0$ et $\frac{x - 2}{x} < 0$ pour $x \in]0 ; 2[$.

Donc pour $x \in]0 ; 2[$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ et pour $x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

64 **1.** Le coefficient directeur de la tangente en O est égal à -2 ; donc $f'(0) = -2$.

De plus, les tangentes en A et B sont horizontales, donc $f'(-1) = f'(2) = 0$.

2. $f'(0) = -2$ équivaut à $c = -2$,

$f'(-1) = 0$ équivaut à $a - b + c = 0$,

$f'(2) = 0$ équivaut à $4a + 2b + c = 0$;

soit $c = -2$ et $\begin{cases} a - b = 2 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + b = 1. \end{cases}$

Il en résulte que $a = 1$ et $b = -1$, et $f'(x) = x^2 - x - 2$.

65 $\mathscr{C}_1$ a pour équation $y = x^2 - 4x$;

$\mathscr{C}_2$ a pour équation $y = -x^2 + 8x$.

Notons x_0 l'abscisse de A et B ;

alors : $\mathrm{A}(x_0 ; x_0^2 - 4x_0)$ et $\mathrm{B}(x_0 ; -x_0^2 + 8x_0)$.

La droite d a pour équation $y = 2(x_0 - 2)x - x_0^2$ et la droite d' a pour équation $y = -2(x_0 - 4)x + x_0^2$.

Ces tangentes sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, soit : $2(x_0 - 2) = -2(x_0 - 4)$.

Donc $x_0 = 3$.

66 Soit M d'abscisse m un point quelconque de $\mathscr{C}$.

Le point M a pour coordonnées $(m ; 4m^2 - 6m + 2)$.

La tangente T_m en M a pour équation :

$$y = (8m - 6)x - 4m^2 + 2.$$

Pour étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_m, on cherche le signe de $4x^2 - 6x + 2 - (8m - 6)x + 4m^2 - 2 = 4x^2 - 8mx + 4m^2$.

Or $4x^2 - 8mx + 4m^2 = (2x - 2m)^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\mathscr{C}$ est au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

67 Pour $x = 1$, $y = m + 1 - 2m + m = 1$; donc le point A(1 ; 1) est commun à toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$.

Si on pose $f(x) = mx^2 + (1 - 2m)x + m$, $f'(x) = 2mx + 1 - 2m$ donc $f'(1) = 1$.

La tangente en A a pour équation : $y = 1(x - 1) + 1 = x$.

Toutes les paraboles sont donc tangentes entre elles en A(1 ; 1) et la tangente commune a pour équation $y = x$.

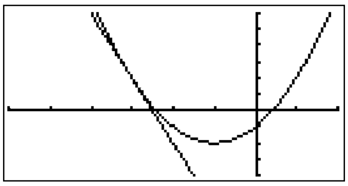
EXERCICES Travail en autonomie (page 90)

A Tangente en O : $y = x$.

Tangente en A : $y = \frac{x}{3} + 4$.

Tangente en B : $y = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2}$.

B



La droite semble tangente à la courbe au point d'abscisse -3.
Les coordonnées $(x ; y)$ d'un point commun vérifient le système (S) :

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = -4x - 10 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 10 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 10 \\ (x+3)^2 = 0 \end{cases}$$

Un seul point commun, de coordonnées $(-3 ; 2)$.
La parabole est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$.
Il reste à vérifier que la droite est bien tangente à la parabole, c'est-à-dire que $f'(-3) = -4$.
$f'(x) = 2x + 2$ donc $f'(-3) = -4$.

C Le point H a pour coordonnées $(0 ; 1)$ donc H' a pour coordonnées $(0 ; -2)$.
La droite (AH') a pour équation réduite : $y = 3x - 2$.
Il reste à vérifier que la droite est bien tangente à la courbe, c'est-à-dire que $f'(1) = 3$.
$f'(x) = 3x^2$ donc $f'(1) = 3$.

D **1. a)** $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$.

Le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 3$ est égal à 16 : le trinôme admet deux racines, -1 et 3.
Les points communs ont donc pour coordonnées : $A(-1 ; 1)$ et $B(3 ; 9)$.

b) Le milieu H a pour coordonnées $(1 ; 5)$.

2. a) $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2$.

b) $f'(x_C) = 2$ soit $2x_C = 2$ et $x_C = 1 = x_H$.

E **1. a)** $f(m) = \frac{m^2}{2} - 2m + 3$ et $f'(m) = m - 2$.

b) $y = (m-2)(x-m) + \frac{m^2}{2} - 2m + 3$, soit $y = (m-2)x - \frac{m^2}{2} + 3$.

Cette tangente passe par A pour $-\frac{m^2}{2} + 3 = -3$,
c'est-à-dire pour $m^2 = 12$, soit $m = -2\sqrt{3}$ ou $m = 2\sqrt{3}$.

F **1. a)** La parabole :
– passe par O donc $f(0) = 0$;
– passe par A donc $f(1) = 2$;
– a pour tangente d en A : $f'(1) = 1$ (la droite d a pour coefficient directeur 1).

b) $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f'(x) = 2ax + b$ soit $f'(1) = 2a + b$.
D'où le système :

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

2. $c = 0$ puis $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

soit $a = -1$, $b = 3$ et $c = 0$, donc $f(x) = -x^2 + 3x$.