

Second degré

ACTIVITÉS

(page 23)

Activité 1

1 a) $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, soit $\alpha = 1$.

b) $x^2 + 2x - 8 = (x + 1)^2 - 9$.

c) et d) $x^2 + 2x - 8 = [(x + 1) - 3][(x + 1) + 3]$
 $= (x - 2)(x + 4)$.

$\mathcal{S} = \{2; -4\}$.

2 a) $x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9$.

b) $2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 2 - 3)(x - 2 + 3) = 2(x - 5)(x + 1)$.

$\mathcal{S} = \{-1; 5\}$.

3 a) $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 - 4 + 5 = (x + 2)^2 + 1$.

b) $(x + 2)^2 + 1 = 0$ équivaut à $(x + 2)^2 = -1$, ce qui est impossible, quel que soit le nombre x .

Activité 2

2 Lorsque a est non nul, la courbe est une parabole.

3 a) Si a est positif, la parabole est « tournée vers le haut ».

Si a est négatif, elle est « tournée vers le bas ».

b) α est l'abscisse du sommet de la parabole.

c) β est l'ordonnée du sommet de la parabole.

d) • Si β est négatif (strictement), l'équation admet deux solutions.

• Si β est nul, une solution : $x = \alpha$.

• Si β est strictement positif : pas de solution.

PROBLÈME OUVERT

$(3 + x)^2 + (4 + x)^2 = (6 + x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 = 0$.

Deux solutions (une seule positive : $x = 2\sqrt{3} - 1$).

Réponse : oui, il est possible d'obtenir un triangle rectangle en ajoutant à chaque longueur $(2\sqrt{3} - 1)$ unités de longueur.

EXERCICES

Application (page 28)

1 a) $f(x) = (x + 3)^2 - 9$.

b) $f(x) = -3(x - 1)^2 + 1$.

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

d) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$.

2 1. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$.

2. $f(x) - \left(-\frac{17}{4}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.

Donc pour tout x , $f(x) - \left(-\frac{17}{4}\right) \geq 0$ et $f(x) \geq -\frac{17}{4}$.

3 1. a) $f(x) = (x-2)^2 - 2$.

b) $f(x) = (x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$.

2. $y_A = f(0) = 2$.

$f(x) = 0$ pour $x_B = 2 - \sqrt{2}$ et $x_C = 2 + \sqrt{2}$.

$f(x) = 4$ pour $(x-2)^2 = 6$ soit $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{6}$.

Soit : A(0; 2), B(2 - $\sqrt{2}$; 0), C(2 + $\sqrt{2}$; 0), I(2 - $\sqrt{6}$; 4) et J(2 + $\sqrt{6}$; 4).

4 a) $x(7x+8) = 0$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{8}{7}; 0\right\}$.

b) $x^2 = 6$; $\mathcal{S} = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.

c) $(x+3)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-2) = 0$; $\mathcal{S} = \{-8; 2\}$.

d) $(x-5)^2 = 0$; $\mathcal{S} = \{5\}$.

5 a) $\Delta = 17$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

b) $\Delta = 88$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{-4-\sqrt{22}}{3}; \frac{-4+\sqrt{22}}{3}\right\}$.

c) $\Delta < 0$; $\mathcal{S} = \emptyset$.

d) $\Delta = 0$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

6 Le triangle BMN est rectangle en M et isocèle donc MN = x et l'aire du rectangle est $x(6-x)$.

$x(6-x) = \frac{1}{3} \times 18 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$.

$\Delta = 12$. Les solutions sont $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$.

7 a) Le coefficient de x^2 est négatif ($-10x^2$), le produit est donc positif ou nul entre les racines $-\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$:

$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{5}; \frac{1}{2}\right]$.

b) Le coefficient de x^2 est positif ($2x^2$), le produit est donc strictement négatif entre les racines -2 et $\frac{3}{2}$: $\mathcal{S} = \left]-2; \frac{3}{2}\right]$.

c) L'inéquation est équivalente à $x(3x+5) > 0$. Le coefficient de x^2 est positif ($3x^2$), le produit est donc strictement positif à l'extérieur du segment déterminé par les racines $-\frac{5}{3}$ et 0 : $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{5}{3}\right[\cup]0; +\infty[$.

8 a) $16 - (2x-1)^2 = (5-2x)(2x+3)$.

Le coefficient de x^2 est négatif ($-4x^2$) donc l'expression $16 - (2x-1)^2$ est négative ou nulle pour :

$x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

b) L'inéquation est équivalente à $(2x-4)(x+5) < 0$.

Le coefficient de x^2 est positif ($2x^2$) donc l'expression $(2x-4)(x+5)$ est strictement négative pour $x \in]-5; 2[$.

c) L'inéquation est équivalente à $(3x-8)(-x-6) < 0$. Le coefficient de x^2 est négatif ($-3x^2$), le produit $(3x-8)(-x-6)$ est donc négatif ou nul pour $x \in]-\infty; -6] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$.

9 1. On peut conjecturer graphiquement que \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f pour $x \in]0; 2[$.

2. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow 6x - 2x^2 > x^2$
 $\Leftrightarrow 3x(2-x) > 0$.

Le coefficient de x^2 est négatif (-3) : le produit $3x(2-x)$ est strictement positif entre les racines 0 et 2.

10 a) $x^2 + x - 2$ a pour racines 1 et -2 .

Le coefficient de x^2 est positif donc $x^2 + x - 2$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

b) $-x^2 + 2x - 3$ n'a pas de racine ($\Delta < 0$) et garde donc un signe constant, celui de a , c'est-à-dire négatif.

c) $100t^2 - 60t + 9 = (10t-3)^2$ est toujours positif. Il s'annule en $\frac{3}{10}$.

d) $-2x^2 + 5x - 3$ a deux racines distinctes car $\Delta = 1$:
 $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2 + 5x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

11 a) $x^2 + x - 20$ a deux racines 4 et -5 . Il est négatif (du signe contraire de a) entre ses racines. $\mathcal{S} =]-5; 4[$.

b) $x^2 - x + 1$ n'a pas de racine car $\Delta = -3$, il garde un signe constant, positif ($a = 1$), donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

c) $\Delta = 1$; le trinôme admet deux racines : -4 et -3 .

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$	
$x^2 + 7x + 12$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathcal{S} =]-\infty; -4] \cup]-3; +\infty[$.

d) $\Delta < 0$; $7x^2 - 5x + 1$ garde un signe constant, positif ($a = 7$), donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

12 $x^2 < x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$.

Le trinôme $x^2 - x - 2$ a deux racines : -1 et 2 . Le coefficient de x^2 est positif (x^2), donc le trinôme est négatif entre les racines : $\mathcal{S} =]-1; 2[$.

13 1. $a < 0$, $\Delta > 0$.

2. $\mathcal{S} =]-1; 2[$.

3. Les racines du trinôme étant -1 et 2 , celui-ci se factorise :
 $f(x) = a(x+1)(x-2)$.
 D'autre part : $f(0) = 3$; donc : $a = -\frac{3}{2}$.

14 1. $x^2 - 40x + 384$ a deux racines : 16 et 24.

$a > 0$, donc il est négatif entre ses racines : $\mathcal{S} =]16; 24[$.

2. $x(40-x) \geq 384 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 384 \leq 0$.

Les dimensions x et y de la pelouse doivent être comprises entre 16 et 24 m, avec $x + y = 40$.

15 a) $x + 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ et $x \neq 0$
 $\Leftrightarrow x = x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) $x + 1 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 1}{x} > 0$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
$x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x^2 + x - 1}{x}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

\mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g équivaut à :

$$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right[\cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[.$$

16 a) $3x - 4 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0$ et $x \neq 0$
 $\Leftrightarrow x = x_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ ou $x = x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

b) $3x - 4 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 4x - 1}{x} > 0.$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$		
$3x^2 - 4x - 1$		+	0	-	-	0	+
x		-	-	0	+	+	
$\frac{3x^2 - 4x - 1}{x}$		-	0	+	-	0	+

\mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g équivaut à :

$$x \in \left[\frac{2-\sqrt{7}}{3}; 0 \right[\cup \left[\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty \right[.$$

17 a) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x-2 = x^2-1$ et $(x \neq 1$ et $x \neq 2)$
 $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ et $(x \neq 1$ et $x \neq 2)$.

Or $\Delta < 0$ donc il n'y a aucun point commun entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

b) $\frac{1}{x-1} > \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-x^2+1}{(x-1)(x-2)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x^2+x-1}{(x-1)(x-2)} > 0.$

$(x-1)(x-2)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle $[1; 2]$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$-x^2 + x - 1$		-	-	-		
$(x-1)(x-2)$		+	0	-	0	+
$\frac{-x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)}$		-	+	-		

\mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g équivaut à $x \in]1; 2[.$

18 Le trinôme $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux racines, 1 et -2. Il est strictement positif à l'extérieur de l'intervalle $[-2; 1]$. $x^2 - 9$ admet deux racines, -3 et 3, et est strictement positif à l'extérieur de l'intervalle $[-3; 3]$.

x	$-\infty$	-3	-2	1	3	$+\infty$		
$x^2 + x - 2$		+	+	0	-	0	+	
$x^2 - 9$		+	0	-	-	-	0	+
$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 9}$		+	-	0	+	0	-	+

$$\mathcal{S} =]-3; -2] \cup [1; 3[.$$

19 $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-1}{x^2-3x+2} \leq 0.$

Le trinôme $-x^2+4x-1$ admet deux racines, $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$. Il est strictement positif à l'intérieur de l'intervalle : $]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[.$

Le trinôme x^2-3x+2 admet deux racines, 1 et 2. Il est positif à l'extérieur de l'intervalle $[1; 2]$.

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	1	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$-x^2 + 4x - 1$		-	0	+	+	+	0	-
$x^2 - 3x + 2$		+	+	0	-	0	+	+
$\frac{-x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$		-	0	+	-	+	0	-

$$\mathcal{S} =]-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [1; 2[\cup]2+\sqrt{3}; +\infty[.$$

20 $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{x+3(x+2)+2x(x+2)}{x(x+2)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2x^2+8x+6}{x(x+2)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+3}{x(x+2)} \leq 0.$

Le trinôme x^2+4x+3 admet deux racines, -1 et -3. Il est positif à l'extérieur de l'intervalle $[-3; -1]$.

$x(x+2)$ est positif à l'extérieur de l'intervalle $[-2; 0]$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$		
$x^2 + 4x + 3$		+	0	-	-	0	+	
$x(x+2)$		+	+	0	-	-	0	+
$\frac{x^2 + 4x + 3}{x(x+2)}$		+	0	-	+	0	-	+

$$\mathcal{S} = [-3; -2] \cup [-1; 0[.$$

21 $\frac{x-1}{x+1} > \frac{2x-5}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (2x-5)(x+1)}{x^2-1} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+6}{x^2-1} > 0.$

Le trinôme $-x^2+x+6$ admet deux racines, -2 et 3. Il est positif à l'extérieur de l'intervalle $[-2; 3]$.

x^2-1 est positif à l'extérieur de l'intervalle $[-1; 1]$.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$		
$-x^2 + x + 6$		-	0	+	+	+	0	-
$x^2 - 1$		+	+	0	-	0	+	+
$\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - 1}$		-	0	+	-	+	0	-

$$\mathcal{S} =]-2; -1[\cup [1; 3[.$$

26 Position relative de deux courbes

• *Les outils* :

- Signe d'un trinôme du second degré.
- Tableau de signes.

• *L'objectif* :

- Savoir résoudre une inéquation en se ramenant à l'étude du signe d'un produit.

1. \mathcal{H} est au-dessus de d pour $x < \alpha$ avec $\alpha \approx -0,3$ et pour $x \in]0; 2[$.

\mathcal{H} est en dessous sinon.

2. $3x - 5 \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow 3x - 5 - \frac{2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{x} \geq 0$.

3. a) Le trinôme $3x^2 - 5x - 2$ a deux racines : $-\frac{1}{3}$ et 2 .

Le coefficient de x^2 est positif donc le trinôme est négatif entre les racines et positif sinon.

b)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	2	$+\infty$	
$3x^2 - 5x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

c) d est au-dessus de \mathcal{H} pour $x \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right[\cup \left]2; +\infty\right[$.

27 Une aire minimale

• *L'outil* :

- Forme canonique d'un trinôme du second degré.

• *L'objectif* :

- Savoir utiliser la forme canonique pour déterminer une valeur minimale.

1. $\mathcal{A} = 32 - x(8 - x) - x(4 - x) = 32 - 12x + 2x^2$.

2. a) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 14$.

b) $f(x) - 14 = 2(x - 3)^2$, donc pour tout x de $[0; 4]$, $f(x) \geq 14$.

c) $f(x) = 14 \Leftrightarrow 2(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

d) L'aire est minimale pour $x = 3$.

28 Droite tangente à une parabole

• *Les outils* :

- Équation réduite d'une droite.
- Équation d'une parabole.
- Résolution d'un système non linéaire.

• *L'objectif* :

- Savoir trouver une tangente de direction donnée.

1. $A \in d : 4 = 2m + p$ soit $p = 4 - 2m$ et $y = mx + 4 - 2m$.

2. a) Le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ détermine le nombre de points communs à d et \mathcal{P} .

« d et \mathcal{P} n'ont qu'un point commun » \Leftrightarrow « $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ a une solution unique » $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

b) $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = m^2 - 8m + 16$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

La droite d a alors pour équation $y = 4x - 4$.

29 Narration de recherche

Notons $x = AM$ et y le côté (fixe) du carré ($y^2 = \mathcal{A}$).

$\frac{5}{8}y^2 \leq y^2 - 2x(y - x) \leq \frac{2}{3}y^2$

soit $\begin{cases} 0 \leq 2x^2 - 2xy + \frac{3}{8}y^2 & (1) \\ 2x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$

• (1) $\Leftrightarrow x^2 - xy + \frac{3}{16}y^2 \geq 0$.

Le trinôme en x a deux racines : $\frac{y}{4}$ et $\frac{3y}{4}$.

Donc : (1) $\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{y}{4}\right] \cup \left[\frac{3y}{4}; y\right]$.

• (2) $\Leftrightarrow x^2 - xy + \frac{1}{6}y^2 \leq 0$.

Le trinôme en x a deux racines : $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}y$ et $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}y$ (environ $0,21y$ et $0,78y$).

Donc : (2) $\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3 - \sqrt{3}}{6}y; \frac{3 + \sqrt{3}}{6}y\right]$.

• En conclusion : M doit être sur le segment $[AB]$ tel que :

$x \in \left[\frac{3 - \sqrt{3}}{6}y; \frac{1}{4}y\right] \cup \left[\frac{3}{4}y; \frac{3 + \sqrt{3}}{6}y\right]$.

30 Narration de recherche

On peut, après observation de la vue d'écran, conjecturer que $-1 \leq f(x) \leq 4$ pour $x \in [-5; 5]$.

Démontrons que c'est vrai pour tout nombre x .

• $-1 \leq f(x) \Leftrightarrow -1 \leq \frac{-5x + 1}{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x^2 + x + 1}$.

Remarquons que $2x^2 + x - 1$ garde un signe constant (car $\Delta < 0$) strictement positif (car $a > 0$). Donc :

$-1 \leq f(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$.

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout nombre x , on a bien $-1 \leq f(x)$ pour tout x .

• $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{-5x + 1}{2x^2 + x + 1} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{8x^2 + 9x + 3}{2x^2 + x + 1}$.

Le trinôme $8x^2 + 9x + 3$ garde un signe constant car $\Delta < 0$ et comme le coefficient du terme en x^2 est positif ($8x^2$), le trinôme est toujours positif.

Donc l'inégalité $f(x) \leq 4$ est, elle aussi, vérifiée pour tout x .

• En conclusion, la représentation de f est donc toujours dans la bande de plan (de largeur 5) délimitée par les droites d'équations $y = -1$ et $y = 4$.

31 TP - Résolution d'une équation du second degré

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}; \sqrt{2}\right\}$.

32 TP - Un algorithme pour résoudre une équation du second degré

2. a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{-2 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}\right\}$.

b) $\mathcal{S} = \{5\}$.

c) $\mathcal{S} = \emptyset$.

d) $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. b) CASIO

```

=====SDDEGRE =====
"AX²+BX+C"
"A":?→A
While A=0
"A":?→A
While End
"B":?→B
While End

```

TI

```

PROGRAM:SDDEGRE
:Prompt A,B,C
:While A=0
:Prompt A
:End
:Disp B²-4AC,Fra
C

```

EXERCICES

Entraînement (page 38)

DE TÊTE

- 33** Oui, car $(-2)^2 - 5(-2) - 14 = 0$.
- 34** Non, car $-2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -7 < 0$.
- 35** $\mathcal{S} =]1; 3[$.
- 36** $\Delta = 16$.
- 37** $\Delta = -8 < 0$.
- 38** $2(-1)^2 + (-1) = m$ soit $m = 1$.
- 39** $x^2 - 4x = (x-2)^2 + (-4)$ donc les nombres sont 2 et -4.
- 40** $2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{18}{16} + 5 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{62}{16}$.
D'où $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{4}; -\frac{31}{8}\right\}$.
- 41** $x^2 - 8x + 4$.
- 42** $(2x - 3)(2 - x) = -2x^2 + 7x - 6 : a = -2, b = 7$ et $c = -6$.

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ. FORME CANONIQUE

- 43** a) $2(x-2)^2 - 7$.
b) $-3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$.
c) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{53}{4}$.
d) $-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$.
- 44** Corrigé dans le manuel.
- 45** 1. a) $f(x) = x^2 - 9 - 2x^2 + 2x + 12 = -x^2 + 2x + 3$.
b) $-(x-1)^2 + 4$.
2. a) $f(x) = [2 - (x-1)][2 + (x-1)] = (3-x)(x+1)$.

- b) $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.
3. Les coordonnées du sommet (1; 4), les intersections avec l'axe des abscisses (-1; 0) et (3; 0), enfin le signe de a ($a < 0$).

RACINES D'UN TRINÔME. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

- 46** a) $(x+3)[(x-3)+4] = 0; \mathcal{S} = \{-3; -1\}$.
b) $(x-1)[5(x+1)-3(x+2)] = 0$.
 $(x-1)(2x-1) = 0; \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.
c) $\mathcal{S} = \emptyset$.
d) $(3-3x+1)(3+3x-1) = 0; \mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$.
e) $\mathcal{S} = \{13\}$.
- 47** a) $\mathcal{S} = \{-2; 3\}$.
b) $\{-1; 2\}$.
- 48** a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{7-\sqrt{61}}{6}; \frac{7+\sqrt{61}}{6}\right\}$.
b) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.
- 49** Corrigé dans le manuel.
- 50** a) $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$.
b) $\mathcal{S} = \emptyset$.
- 51** a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{6}{5}; -3\right\}$.
b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right\}$.
- 52** a) $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.
b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{-8+2\sqrt{7}}{3}; \frac{8+2\sqrt{7}}{3}\right\}$.
- 53** a) $A(x) = 12\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (3x+2)(4x-1)$.
b) $B(x) = -3(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2-x)(3x+2)$.

c) $C(x) = (2x - 5)^2$.

54 1. $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

2. $\Delta = 7 + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$; $\mathcal{S} = \{\sqrt{3}; 2\}$.

55 1. 2 est solution $\Leftrightarrow 12 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

2. $3x^2 - 8x + 4 = 0$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$.

56 $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 9$.

$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$ qui admet pour unique racine $-\frac{1}{3}$.

57 $\Delta = m^2 - 16$; $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-4; 4[$.

58 $(x + 2)^3 = x^3 + 2402 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 2402$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 399 = 0$.

Une seule solution positive : $x = 19$.

L'arête du cube mesure donc 19 cm.

59 Soit x le nombre (de joueurs) cherché.

$(x - 5)\left(\frac{2\,000\,000}{x} + 20\,000\right) = 2\,000\,000, x \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)\left(\frac{100}{x} + 1\right) = 100$

$\Leftrightarrow (x - 5)(100 + x) = 100x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 500 = 0$

$\Leftrightarrow x = -20$ ou $x = 25$.

Une seule solution positive : $x = 25$.

Il y avait donc 25 personnes.

60 $\Delta = 1 + 4a^2$; pour tout nombre a , $\Delta > 0$.

61 Corrigé dans le manuel.

62 $2x^2 + x - 11 = x^2 - x - 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$; $\mathcal{S} = \{-3; 1\}$.
 D'où : A(-3; 4) et B(1; 8).

63 $4x^2 + 2(93 + 53)x = \frac{93 \times 53}{5} \Leftrightarrow 4x^2 + 292x - 985,8 = 0$;

$\Delta = 101\,036,8 \approx 317,86^2$.

Une seule solution positive : $x_1 \approx 3,23$.

Donc, à 1 mm près, la largeur du cadre doit être de 3,2 cm.

64 En mètres, notons x la longueur AB et y la largeur AD (x et y sont strictement positifs).

$$\begin{cases} xy = 43\,200 \\ 24y = 20(x - 24) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{43\,200}{x} \\ \frac{24 \times 43\,200}{x} = 20x - 480 \end{cases} \quad (\text{E})$$

(E) $\Leftrightarrow x^2 - 24x - 51\,840 = 0$

$\Leftrightarrow x = -216$ ou $x = 240$.

Donc, la longueur mesure 240 m et la largeur 180 m.

65 $\begin{cases} (1 - 2x)^2 = \frac{1}{2} \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \approx 0,146$.

66 1. $x + \frac{4x}{4 + x} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$ et $x \neq -4$.

Les solutions sont 4 et -6. Comme $x > 0$, $x = 4$ ohms (4 Ω).

2. $\frac{x + 5}{2(x + 3)} + x = 4,5 \Leftrightarrow x^2 + 2,5x - 16,5$ et $x \neq -3$.

Les solutions sont 3 et -5,5; donc $x = 3 \Omega$.

FONCTIONS TRINÔMES

67 • Figure 1 : $\Delta > 0, a > 0$ et $c < 0$.

• Figure 2 : $\Delta > 0, a < 0$ et $c > 0$.

• Figure 3 : $\Delta = 0, a > 0$ et $c > 0$.

• Figure 4 : $\Delta < 0, a > 0$ et $c > 0$.

68 1. La courbe de f est la courbe bleue.

2. a) $f(0) = f(4) = 0$.

b) $f(2) = -4a = -4$ donc $a = 1$.

3. a) $\Delta = 0$; 1 est racine double.

b) $g(0) = a = -2$.

69 1. \mathcal{P} a pour sommet S(2; -7).

\mathcal{P}' a pour sommet S'($\frac{4}{5}$; $-\frac{34}{5}$).

2.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘ -7 ↗		

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	↗ $-\frac{34}{5}$ ↘		

70 1. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 + 4c < 0 \Leftrightarrow c < -1$.

Les deux propositions **A** et **B** sont équivalentes.

2. Le maximum de g est supérieur ou égal à $g(0)$, c'est-à-dire à c ; donc **A** \Rightarrow **B**.

En revanche, la maximum de g peut être positif avec $c \leq 0$.

Contre-exemple : $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, $\max = 1$ et $c = -3$.

71 1. S($-\frac{2}{3}$; $-\frac{16}{3}$).

2. I(-2; 0), J($\frac{2}{3}$; 0) et K(0; -4).

72 $x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 1000 - 300x + 30x^2 - x^3$.

$V(x) = 30x^2 - 300x + 1000$, $V(x)$ est minimal pour

$x = \frac{300}{2 \times 30} = 5$ et le volume est alors égal à 250 cm^3 .

73 a)

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$		
$A(x)$		+	0	-	0	+

b)

x	$-\infty$	-6	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$B(x)$		+	0	-	0	+

c)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$C(x)$		-	0	+	0	-

d)

x	$-\infty$	$-\frac{2}{7}$	0	$+\infty$	
$D(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

74 a) $A(x) = (x+2)[(x-2) - 3(x-1)] = (x+2)(-2x+1)$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $B(x) = (x-5+4)(x-5-4) = (x-1)(x-9)$

x	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
$B(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

c) $C(x) = [2(x+2) - 3(3-2x)][2(x+2) + 3(3-2x)]$
 $= (8x-5)(-4x+13)$

x	$-\infty$	$\frac{5}{8}$	$\frac{13}{4}$	$+\infty$	
$C(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

75 Corrigé dans le manuel.

76 a) $\Delta = 68; x_1 = 6 - 2\sqrt{17}$ et $x_2 = 6 + 2\sqrt{17}$.

x	$-\infty$	$6 - 2\sqrt{17}$	$6 + 2\sqrt{17}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $\Delta = -3$; pour tout x , $g(x) > 0$.

c) $\Delta = -2$; pour tout x , $h(x) < 0$.

77 a) Le trinôme $x^2 + 3x + 2$ a deux racines : -2 et -1 .

Donc, comme le coefficient de x^2 est positif :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[.$$

b) $\Delta < 0$ et $a > 0$; donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

c) Le trinôme $x^2 - 7x + 12$ a deux racines : 3 et 4 .

Donc, comme le coefficient de x^2 est positif, $\mathcal{S} = [3; 4]$.

d) $\Delta < 0$ et $a < 0$; donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

78 a) $(3x+5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}; \mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

b) $-3(t+2)\left(t-\frac{1}{2}\right) \leq 0; \mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[.$

c) $\Delta = 64^2; x_1 = -\frac{1}{8}, x_2 = \frac{7}{8}$ et $a < 0$.

Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{8}\right[\cup \left[\frac{7}{8}; +\infty\right[.$

d) $(2t+3)^2 > 0 \Leftrightarrow t \neq -\frac{3}{2}; \mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[.$

79 Corrigé dans le manuel.

80 a)

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$\frac{3+x}{x-3}$	$+$	0	$-$	$+$

b)

x	$-\infty$	-3	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$\frac{7-4x}{x-3}$	$-$	$+$	0	$-$

c)

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$\frac{x}{5-x}$	$-$	0	$+$	$-$

d) $\frac{3}{x} - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x^2-2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x+3)}{x} \leq 0$.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$	
$-x^2-2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{-x^2-2x+3}{x}$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

$$\mathcal{S} = [-3; 0[\cup [1; +\infty[.$$

81 a) $\mathcal{S} = \emptyset$.

b) $\mathcal{S} =]-1; 3[.$

c) $\mathcal{S} = [0; 3].$

d) $\mathcal{S} = \mathbb{R} - \{2\}.$

82 1. Aire du triangle : $\frac{x(10-x)}{2}$.

Aire du trapèze : $\frac{x+10}{2} \times (10-x)$.

$$S(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2 + 100 - x^2) = -x^2 + 5x + 50.$$

2. a) Le trinôme $-x^2 + 5x + 50$ a deux racines, -5 et 10 , et atteint son maximum pour $x = \frac{5}{2}$.

x	0	$\frac{5}{2}$	10
$S(x)$		$\frac{225}{4}$	

b) Maximum : $\frac{225}{4}$ pour $x = \frac{5}{2}$.

Pour $x = 2,5$ cm, l'aire est maximale et est égale à $56,25$ cm².

3. $S(x) \leq$ aire (AMPN) $\Leftrightarrow -x^2 + 5x + 50 \leq x^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 50 \geq 0.$$

$$x_1 = \frac{5 - 5\sqrt{17}}{4} \approx -3,9 \text{ et } x_2 = \frac{5 + 5\sqrt{17}}{4} \approx 6,4.$$

Donc pour $x \geq \frac{5 + 5\sqrt{17}}{4}$, $S(x) \leq$ aire (AMPN).

83 1. a) $x^2 + 12x - 108 = 0; \Delta = 144 + 432 = 576 = 24^2$.

$$x_1 = \frac{-12 - 24}{2} = -18 \text{ et } x_2 = \frac{-12 + 24}{2} = 6.$$

Avec l'algorithme 6 $\rightarrow 36 \rightarrow 144 \rightarrow 12 \rightarrow 6 = x_2$.

b) $8 \rightarrow 64 \rightarrow 144 \rightarrow 12 \rightarrow 4$

$$\Delta = 256 + 320 = 24^2.$$

$$x_1 = \frac{-16 - 24}{2} = -20 \text{ et } x_2 = \frac{-16 + 24}{2} = 4.$$

2. a) $x^2 + bx - c = 0$ a pour discriminant $\Delta = b^2 + 4c > 0$.

b) x_1 prend la valeur $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.

84 1. $\frac{HM}{AC} = \frac{HB}{AB}$, soit $HM = HB = 5 - x$.

$$S(x) = \frac{5 \times 5}{2} - x(5-x) = x^2 - 5x + \frac{25}{2}.$$

2. a) $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$S(x)$	$\frac{25}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{25}{2}$

b) L'aire est minimale pour $x = \frac{5}{2}$ et $S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$.

3. $S(x) \leq \frac{75}{8} \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{8} \leq 0$.

$\Delta = \frac{25}{2}$; $x_1 = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$ et $x_2 = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}$. $\mathcal{S} = [x_1; x_2]$.

AVEC LES TICÉ

85 1. c) Le point C semble appartenir à la droite d'équation $x = 1$.

Pour $m > -1$, il semble y avoir deux points d'intersection.

2. a) $x^2 - 2x - m = 0$; $\Delta = 4 + 4m$.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

b) Si $m \geq -1$:

$x_A = \frac{2 - \sqrt{4 + 4m}}{2} = 1 - \sqrt{1 + m}$ et $x_B = 1 + \sqrt{1 + m}$.

c) $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$. Le point C appartient bien à la droite d'équation $x = 1$.

86 1. On peut conjecturer que le trinôme a deux racines distinctes lorsque le produit $a \times y_s$ est strictement négatif.

2. $y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$

$a \times y_s = \frac{-b^2 + 4ac}{4} = -\frac{\Delta}{4}$ ce qui permet de démontrer la conjecture car $\Delta > 0$ équivaut à $a \times y_s < 0$.

ROC Restitution organisée de connaissances

87 1. $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$x_1 \times x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

2. a) $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$; $\frac{1}{2}$ est bien solution.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$ soit $\frac{1}{2} + x_2 = -1$, et $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Vérification : $x_1 x_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} = \frac{c}{a}$.

b) 1 est une solution évidente ($1 + 5 - 6 = 0$).

Le produit est égal à -6 donc l'autre solution est -6 .

POUR ALLER PLUS LOIN

88 1. a) $(-7 \times 16) + (9 \times 4) + 76 = -112 + 36 + 76 = 0$.

b) $x_1 + x_2 = \frac{9}{7}$ donc $x_2 = \frac{9}{7} - 4 = -\frac{19}{7}$.

89 a) 1 est une solution évidente ($3 - 5 + 2 = 0$).

Le produit est égal à $\frac{2}{3}$ donc l'autre solution est $\frac{2}{3}$.

b) -1 est une solution; le produit est égal à $-\frac{1}{7}$ donc $\frac{1}{7}$ est l'autre solution.

c) 2 est une solution; la somme est égale à -1 , donc -3 est l'autre solution.

d) 1 est une solution; le produit est égal à $-\frac{15}{8}$, donc $-\frac{15}{8}$ est l'autre solution.

90 Corrigé dans le manuel.

Prendre toutes les initiatives

91 Notons $n - 1$, n et $n + 1$ les trois entiers consécutifs cherchés.

$(n - 1) + n + (n + 1) = n(n - 1)(n + 1) \Leftrightarrow 3n = n(n^2 - 1)$
 $\Leftrightarrow n(n^2 - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow n \in \{0; -2; 2\}$.

Les triplets cherchés sont $(-1; 0; 1)$, $(-3; -2; -1)$ et $(1; 2; 3)$.

92 A(2; 1) milieu de [MN] avec M $\left(m; \frac{1}{m}\right)$ et N $\left(n; \frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{m+n}{2} = 2$ et $\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{2} = 1$

$\Leftrightarrow m+n = 4$ et $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$

$\Leftrightarrow m+n = 4$ et $\frac{m+n}{mn} = 2$

$\Leftrightarrow m+n = 4$ et $mn = 2$

$\Leftrightarrow m$ et n sont solutions de $x^2 - 4x + 2 = 0$.

$\Delta = 8$; soit $m = 2 - \sqrt{2}$ et $n = 2 + \sqrt{2}$.

EXERCICES

Approfondissement (page 43)

93 « $f(x) < 0$ pour tout x » équivaut à $\Delta < 0$, soit à $m > \frac{9}{4}$.

94 $\Delta = (m + 1)^2 - 16$.

1. $\Delta = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow m = -5$ ou $m = 3$.

• $m = -5$: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$; $\mathcal{S} = \{-2\}$.

• $m = 3$: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$; $\mathcal{S} = \{2\}$.

2. a) $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-5; 3[$.

95 $\Delta = 16 - 8m(m - 1) = -8(m^2 - m - 2)$.

1. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 2$.

• $m = -1$: $-x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$; $\mathcal{S} = \{2\}$.

• $m = 2$: $2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$; $\mathcal{S} = \{-1\}$.

96 $(x+2)^3 = x^3 + 488 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 488$
 $\Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 480 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 80 = 0.$

$\Delta = 4 + 320 = 18^2; \mathcal{S} = \{-10; 8\}.$

L'arête du cube mesure 8 cm.

97 1. a) Quatre solutions.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -2)$ ou $(x = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{2}).$
 $\mathcal{S} = \{-2; 1 - \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\}.$

2. a) On peut conjecturer que l'inéquation $f(x) < 0$ a pour solutions les nombres de $] -2; 1 - \sqrt{2}[\cup] 1; 1 + \sqrt{2}[.$

b) $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 2x - 1).$

x	$-\infty$	-2	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$				
$x^2 + x - 2$		+	0	-	-	0	+			
$x^2 - 2x - 1$		+	+	0	-	-	0	+		
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+

$\mathcal{S} =] -2; 1 - \sqrt{2}[\cup] 1; 1 + \sqrt{2}[.$

98 1. La simplification par $x + 1$ n'est possible que si $x + 1 \neq 0.$

$x^2 - 1 = x + 1 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) - (x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0.$
 $\mathcal{S} = \{-1; 2\}.$

2. Sur $[0, 1], x \geq x^2.$

$(x + 1)^2 \geq x + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - (x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)x \geq 0.$
 $\mathcal{S} =] -\infty; -1] \cup [0; +\infty[.$

3. Le signe de $x + 2$ doit être pris en compte pour une multiplication des deux membres.

$\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 2} - x \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 - x(x + 2)}{x + 2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-1 - 2x}{x + 2} \leq 0.$
 $\mathcal{S} =] -\infty; -2] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$

99 $t = \frac{d}{v}.$

1. a) $t_{\text{aller}} = \frac{d}{90 + v} = \frac{108}{90 + v}.$

b) $t_{\text{retour}} = \frac{d}{90 - v} = \frac{108}{90 - v}.$

2. $\frac{108}{90 + v} + \frac{108}{90 - v} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 108(90 - v) + 108(90 + v) = \frac{5}{2}(90^2 - v^2)$

$\Leftrightarrow 108 \times 180 \times \frac{2}{5} = 90^2 - v^2$

$\Leftrightarrow v^2 = 90^2 - 7776 = 18^2.$

La vitesse du vent est de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

100 A. 1. a) Pour $m = 2, g(x) = 2x^2 + 4x + 4.$

$2x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 0.$

$g(-1) = 0,$ donc l'implication est fausse.

b) $\Delta = 16 - 4m.$

$m < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0;$ donc l'implication est vraie.

c) $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 4;$ donc l'implication est fausse.

2. Non, car l'une est vraie et l'autre fausse.

B. Faux.

Contre-exemple : l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$ a deux solutions distinctes, -1 et $-2.$

• a et c sont pourtant de même signe.

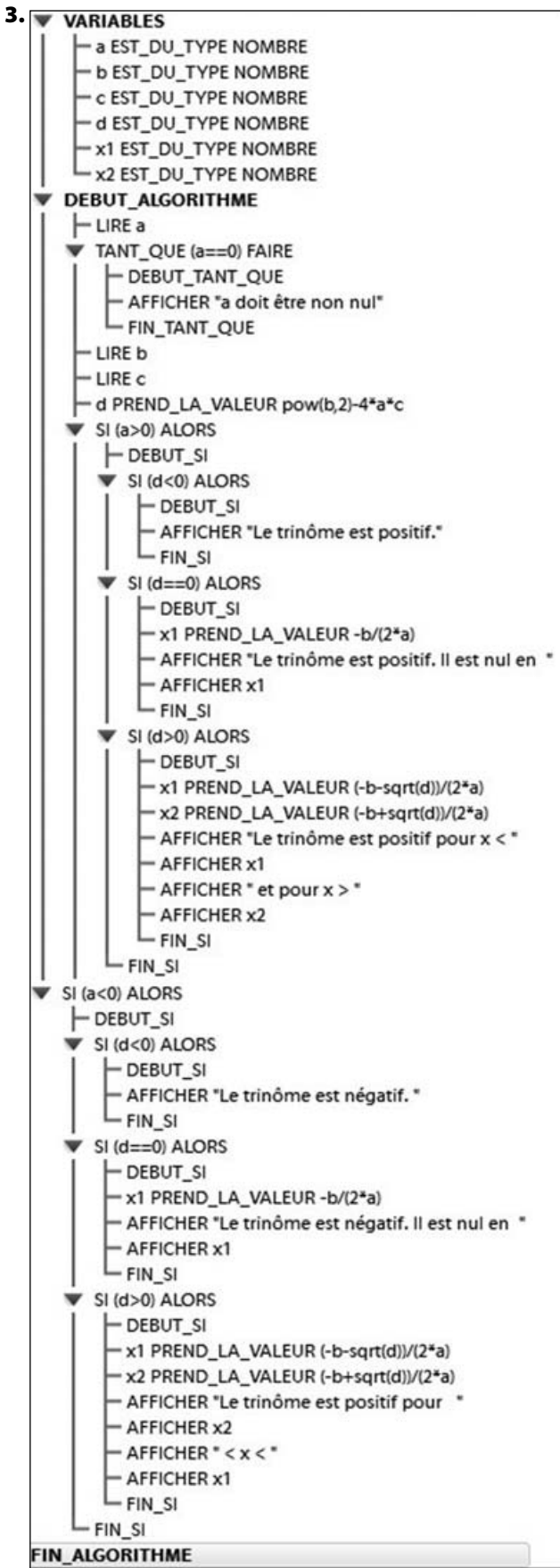
• La réciproque est vraie car si a et c sont de signes contraires, ac est strictement négatif et Δ est strictement positif.

101 1. Ces lignes permettent de s'assurer de la saisie d'un nombre a non nul.

```

2. SI (d>0) ALORS
  DEBUT_SI
  x1 PREND_LA_VALEUR (-b-sqrt(d))/(2*a)
  x2 PREND_LA_VALEUR (-b+sqrt(d))/(2*a)
  SI (a>0) ALORS
  DEBUT_SI
  AFFICHER "Le trinôme est positif pour x < "
  AFFICHER x1
  AFFICHER "et pour x > "
  AFFICHER x2
  FIN_SI
  SINON
  DEBUT_SINON
  AFFICHER "Le trinôme est positif pour "
  AFFICHER x2
  AFFICHER "< x <"
  AFFICHER x1
  FIN_SINON
  FIN_SI
SI (d==0) ALORS
  DEBUT_SI
  x1 PREND_LA_VALEUR -b/(2*a)
  SI (a>0) ALORS
  DEBUT_SI
  AFFICHER "Le trinôme est positif. Il est nul en "
  AFFICHER x1
  FIN_SI
  SINON
  DEBUT_SINON
  AFFICHER "Le trinôme est négatif. Il est nul en "
  AFFICHER x1
  FIN_SINON
  FIN_SI
FIN ALGORITHME

```

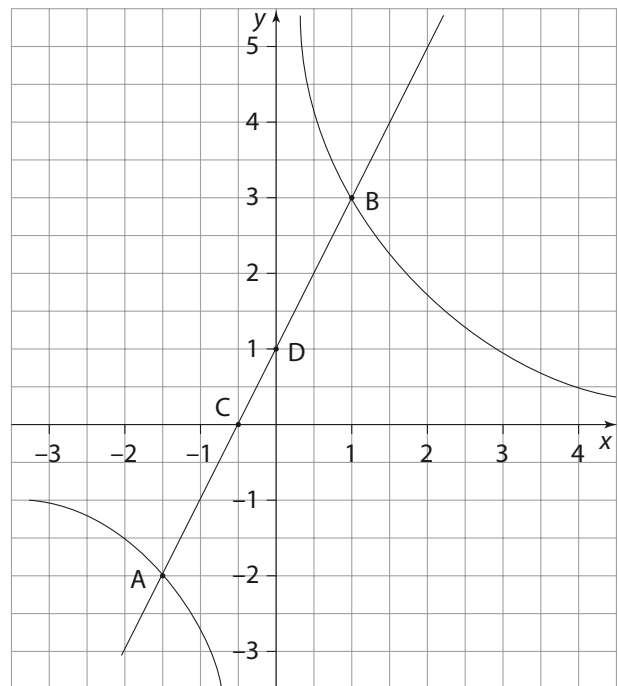


102 Notons x la longueur et y la largeur du jardin.

$$\begin{cases} xy = 805 \\ 2 \times 1,5 \times (x + y) - 4 \times 1,5^2 = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 805 \\ x + y = 58 \end{cases}$$

Donc $x(58 - x) = 805$ soit $-x^2 + 58x - 805 = 0$.
 $\Delta = 144 = 12^2$; donc, avec $x > y$, $x = 35$ et $y = 23$.

103



(E) $2x + 1 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x \neq 0$ et $2x^2 + x - 3 = 0$.
 $\Delta = 25 = 5^2$; donc (E) a pour solutions 1 et $-\frac{3}{2}$.
 Les coordonnées de A sont $(-\frac{3}{2}; -2)$, celles de B sont (1 ; 3)
 et celles du milieu de [AB] sont $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.
 La droite d coupe les axes en $C(-\frac{1}{2}; 0)$ et $D(0; 1)$.
 Le milieu de [CD] est bien celui de [AB].

104 1. Appliquons le théorème de Thalès :
 $\frac{MN}{AS} = \frac{BM}{AB}$, donc $MN = 2 \times \frac{4-x}{4} = 2 - \frac{x}{2}$;
 $\frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AB}$, donc $MQ = x$ (AMQ est aussi équilatéral...)
 $\text{Aire}(MNPQ) = MN \times MQ = -\frac{x^2}{2} = 2x$.
 2. $-\frac{x^2}{2} + 2x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 8 = 0$.
 $\Delta = 48$; $x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \approx 3,155$ et $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 0,845$.
 Donc deux solutions ($0 \leq x \leq 4$) au problème posé.

105 1. d coupe (OC) au point F de coordonnées (0 ; m);
 donc si $2 \leq m < 4$, alors F appartient à [OC].
 d coupe (BC) au point E de coordonnées (8 - 2 m ; 4);
 donc si $2 \leq m < 4$, alors $0 < 8 - 2m \leq 4$ et $E \in [BC]$.
 2. a) $CF = 4 - m$, $CE = 8 - 2m$; donc $\text{aire}(ECF) = (4 - m)^2$.
 b) $8(4 - m)^2 \leq 16 \Leftrightarrow (4 - m)^2 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 14 \leq 0$.
 $\Delta = 8$; le trinôme $m^2 - 8m + 14$ est négatif pour :
 $m \in [4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}]$.

De plus, par hypothèse $m \in [2; 4]$, donc les nombres cherchés sont ceux de l'intervalle $[4 - \sqrt{2}; 4]$.

106 Dire que le poids de l'astronaute est inférieur à 25 N équivaut à :
 $x \geq 0$ et $60 \times 9,8 \times \left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2 \leq 25$.

Cette dernière inéquation équivaut à :

$$588 \times 6400^2 \leq 25(6400 + x)^2,$$

soit encore à : $x^2 + 12800x - 922419200 \geq 0$.

Donc, x étant positif, le poids de l'astronaute sera inférieur à 25 N à partir de 24 639 km d'altitude (à 1 km près).

Remarque : l'altitude de l'orbite géostationnaire est 36 000 km.

107 1. a) $\frac{ON}{OM} = \frac{2}{m-3}$ soit $ON = \frac{2m}{m-3}$.

b) Aire(OMN) = $\frac{2m}{m-3} \times m \times \frac{1}{2} = \frac{m^2}{m-3}$.

2. $\frac{m^2}{m-3} \leq 16$ et $m > 3 \Leftrightarrow \frac{m^2}{m-3} - 16 \leq 0$ et $m > 3$
 $\Leftrightarrow m^2 - 16m + 48 \leq 0$ et $m > 3$.

$\Delta = 64 = 8^2$; le trinôme admet 4 et 12 comme racines et est négatif pour $m \in [4; 12]$.

108 1. $f(0) = 4$ et $g(0) = -3$, donc la courbe rouge est la représentation de la fonction f .

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 4 = x^2 - 3$
 $\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -7$.

Les points d'intersection ont pour coordonnées $(-1; -2)$ et $(-7; 46)$.

3. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-7; -1]$.

109 1. $C(n) \geq 4700 \Leftrightarrow 0,02n^2 + 8n - 4200 \geq 0$
 $\Leftrightarrow n \notin [-700; 300]$ et $n \geq 0$.

Le coût total est supérieur à 4700 € pour $n \geq 300$.

2. a) $B(n) = 17,5n - C(n) = -0,02n^2 + 9,5n - 500$.

b) $B(n) \geq 0 \Leftrightarrow -0,02n^2 + 9,5n - 500 \geq 0$ (et $n \geq 0$).

$\Delta = 50,25$; le trinôme est positif pour n appartenant à $[x_1; x_2]$ avec $x_1 \approx 60,28$ et $x_2 \approx 414,71$.

n étant entier, l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul pour $n \in [61; 414]$.

3. $B(n) = np - C(n) = -0,02n^2 + (p-8)n + 500$.

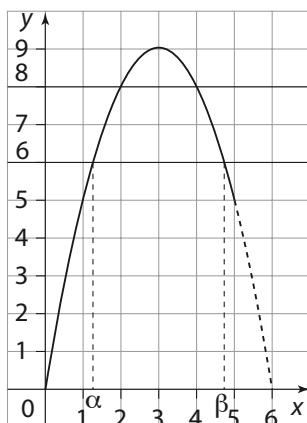
Le trinôme admet un maximum pour $n = -\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire pour $n = \frac{p-8}{0,04}$.

Ce maximum est obtenu pour $\frac{p-8}{0,04} = 300$ soit $p = 20$.

110 1. $\mathcal{A}(x) = \frac{x(12-2x)}{2} = x(6-x) = 6x - x^2$.

2. a) $f(x) = -(x-3)^2 + 9$ et $S(3; 9)$.

b) La représentation de \mathcal{A} est l'arc de la parabole \mathcal{P} restreint à $x \in [0; 5]$.



3. a) Graphiquement, on peut conjecturer que $6 \leq \mathcal{A}(x) \leq 8$ pour $x \in [\alpha; 2] \cup [4; \beta]$ avec $\alpha \approx 1,3$ et $\beta \approx 4,7$.

b) Par le calcul :

• $\mathcal{A}(x) \leq 8 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 \leq 0$.

$\Delta = 4$ et le trinôme est négatif à l'extérieur de l'intervalle $[2; 4]$, donc sur $]0; 2] \cup [4; 5]$.

• $\mathcal{A}(x) \geq 6 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 6 \geq 0$.

$\Delta = 12$; $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{3}$.

Le trinôme $-x^2 + 6x - 6$ est positif (du signe contraire de a) pour $x \in [3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}]$.

• En conclusion : $6 \leq \mathcal{A}(x) \leq 8$ pour x appartenant à : $(]0; 2] \cup [4; 5]) \cap [3 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3}]$ soit $[3 - \sqrt{3}; 2] \cup [4; 3 + \sqrt{3}]$.

Prendre toutes les initiatives

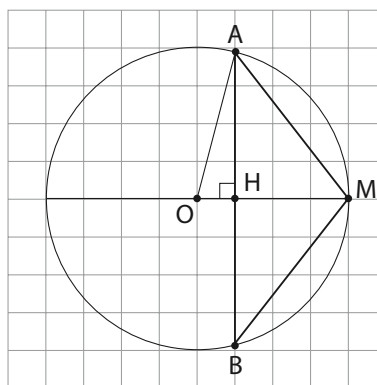
111 Notons x la longueur AC.

«ABC rectangle en C» équivaut à $x^2 + (20-x)^2 = 13^2$ soit à $2x^2 - 40x + 231 = 0$.

Or $\Delta = -248$, donc le problème n'a pas de solution.

112 Notons H le milieu de [AB], O le centre du cercle et x la distance OH ($0 \leq x < 4$).

1. Si $H \in [OM]$, $AM^2 = 16AH^2 = MH^2 + AH^2$.



Il en résulte $15AH^2 = MH^2$, soit :

$$15(16-x^2) = (4-x)^2 \Leftrightarrow 16x^2 - 8x - 14 \times 16 = 0$$

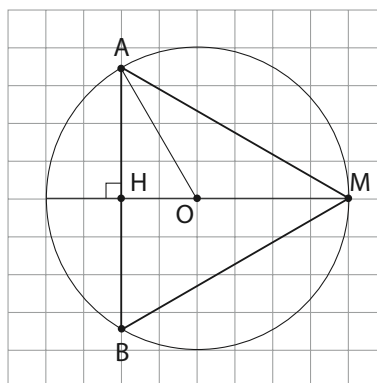
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 28 = 0.$$

Les solutions $-\frac{7}{2}$ et 4 ne conviennent pas (la seule solution positive, 4, correspond à A, B et M confondus).

2. Si $H \notin [OM]$, on obtient :

$$15(16-x^2) = (4+x)^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 8x - 14 \times 16 = 0$$

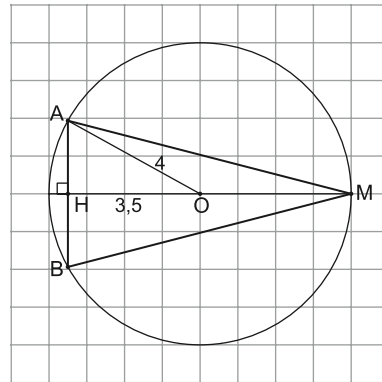
$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 28 = 0.$$



Cette équation admet deux solutions, -4 et $\frac{7}{2}$.

Le problème admet donc une seule solution (avec $x = \frac{7}{2}$):

le point H est sur le diamètre issu de M tel que :
MH = 7,5 cm.



EXERCICES

Travail en autonomie (page 46)

A a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 21\,800 \\ 3x + 3y + (x - y) = 660 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 21\,800 \\ 2x + y = 330 \quad (\text{avec } x > y) \end{cases}$$

b) Le système est équivalent à $\begin{cases} y = 330 - 2x \\ x^2 + (330 - 2x)^2 = 21\,800 \end{cases}$ (E).

L'équation du second degré (E) s'écrit encore :

$$5x^2 - 1\,320x + 87\,100 = 0 \text{ ou } x^2 - 264x + 17\,420 = 0.$$

$$\Delta = 16; x_1 = 130 \text{ et } x_2 = 134.$$

Deux possibilités : $x = 134$ et $y = 62$ ou $x = 130$ et $y = 70$.

B a) $\mathcal{A} = 20x - x^2$.

b) $20x - x^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 50 = 0$.

$$\Delta = 200; x_1 = 10 - 5\sqrt{2} \text{ et } x_2 = 10 + 5\sqrt{2}.$$

$10 + 5\sqrt{2}$ ne convient pas car $0 < x < 10$. Donc la mesure cherchée est $x = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2,92$ cm.

C On projette D orthogonalement sur [AB] en H.

$$DH = \frac{1}{2}AD = h \left(\text{demi-triangle équilatéral ou } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right).$$

$$AB \times DH = 52 \text{ soit } AB \times AD = 104;$$

$$2(AB + AD) = 42 \text{ soit } AB + AD = 21.$$

$$\text{D'où : } AB(21 - AB) = 104, \text{ soit } AB^2 - 21AB + 104 = 0.$$

$$\Delta = 5^2; \text{ l'équation admet deux solutions } 8 \text{ et } 13.$$

En conclusion : $AB = 13$ cm et $AD = 8$ cm ou $AB = 8$ cm et $AD = 13$ cm.

$$\begin{aligned} \text{D } \pi x^2 + \pi(10-x)^2 &\geq \frac{5}{8} \times 10^2 \pi \Leftrightarrow x^2 + (10-x)^2 \geq \frac{125}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + \frac{75}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = 100; x_1 = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{15}{2}.$$

$$\text{E a) } \frac{r_1}{x} = \frac{R}{h} = \frac{3}{12}, \text{ d'où } r_1 = \frac{x}{4}.$$

$$\frac{r_2}{h-x} = \frac{R}{h} = \frac{3}{12}, \text{ d'où } r_2 = \frac{12-x}{4}.$$

$$\text{b) } \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \leq \frac{27\pi}{4} \Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 \leq \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{(12-x)^2}{16} \leq \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 144 \leq 108$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 18 \leq 0.$$

$$\Delta = 72; x_1 = 6 - 3\sqrt{2} \text{ et } x_2 = 6 + 3\sqrt{2}.$$

x doit donc appartenir à l'intervalle $]x_1; x_2[$ avec :

$$x_1 \approx 1,757 \text{ cm et } x_2 \approx 10,242 \text{ cm.}$$

F a) Le trinôme $x^2 - x + 2$ a un discriminant négatif ($\Delta = -7$) donc ne s'annule jamais (et reste strictement positif).

b) Comparons $f(x)$ et 1.

$$f(x) - 1 = \frac{2x - 1 - x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2} = \frac{-x^2 + 3x - 3}{x^2 - x + 2}.$$

Le dénominateur étant toujours positif, $f(x) - 1$ est du signe du trinôme $-x^2 + 3x - 3$.

$\Delta = -3$ donc le trinôme garde un signe constant, celui du coefficient a , ici -1 .

Donc, pour tout x , $f(x) - 1 \leq 0$ soit $f(x) \leq 1$.

On démontre de même que pour tout x , $f(x) \geq -1$:

$$f(x) + 1 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2}, \text{ les deux trinômes gardent un signe constant, ils sont strictement positifs.}$$