

ACTIVITÉS

(page 316)

Activité 1

1 a) Feuille de calcul

- Saisir :
 - en A2 : 1
 - en B2 : =SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)=6;1;0)
- Copier B2 vers la droite jusqu'en D2
- Saisir en E2 : =SOMME(B2:D2)

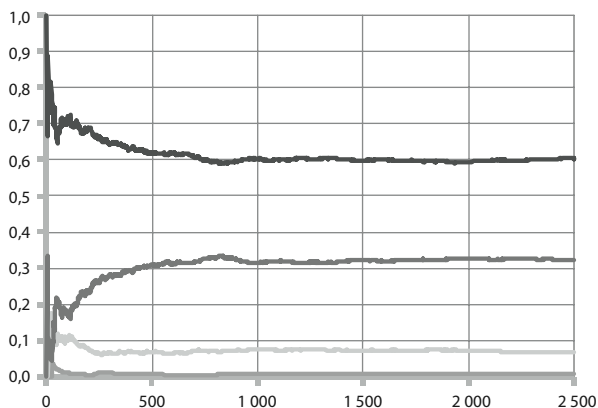
b) Saisir :

- en F2 : =NB.SI(E\$2:E2;0)/\$A2
- en G2 : =NB.SI(E\$2:E2;1)/\$A2
- en H2 : =NB.SI(E\$2:E2;2)/\$A2
- en I2 : =NB.SI(E\$2:E2;3)/\$A2

c) Copier vers le bas la plage A2:I2 jusqu'à la ligne 2 501.

2 a) Représentation graphique

—X=0 —X=1 —X=2 —X=3

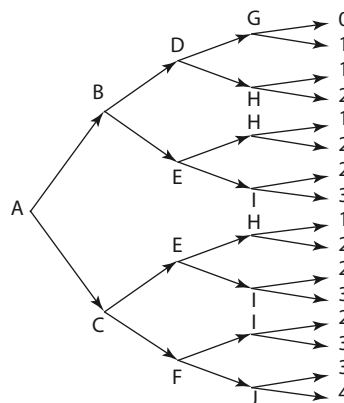


b) Estimation des probabilités des événements « X = k » :

k	0	1	2	3
« X = k »	0,60	0,33	0,07	0,01

Activité 2

1 Arbre représentant les différents chemins :



2 $P(0) = \frac{1}{16}$; $P(1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $P(2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$;
 $P(3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $P(4) = \frac{1}{16}$.

Activité 3

4 a) Tableau des probabilités cumulées de X :

k	0	1	2	3	...
P(X ≤ k)	0,0021	0,0152	0,0566	0,1430	...
k	...	10	11	12	13
P(X ≤ k)	...	0,9624	0,9832	0,9931	0,9974

b) a = 2 et b = 11.

5 Intervalle de fluctuation à 95 % selon la loi binomiale :

$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ soit $I = [0,02; 0,11]$.

6 Prise de décision :

$f_{obs} = 0,19$; $f_{obs} \notin I$ donc on rejette au seuil de 5 % l'hypothèse que dans la population basque, la proportion de personnes du groupe O⁻ soit $p = 0,06$.

PROBLÈME OUVERT

• Stratégie d'Anna

L'univers est constitué des listes de dix billets deux à deux distincts.

Toutes ces listes sont équiprobables.

On note G : «Au moins un billet gagnant».

\bar{G} signifie : «Aucun billet gagnant».

$$P(\bar{G}) = \frac{97 \times 96 \times \dots \times 91 \times 90 \times 89 \times 88}{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times \dots \times 92 \times 91}$$

$$P(\bar{G}) = \frac{178}{245};$$

$$\text{d'où } P(G) = 1 - \frac{178}{245} = \frac{67}{245}$$

soit $P(G) \approx 0,2735$.

• Stratégie de Boris

L'achat d'un billet est une épreuve de Bernoulli où la probabilité de S «Avoir un billet gagnant» est $p = 0,03$.

L'achat d'un billet durant dix semaines dans les mêmes conditions définit un schéma de Bernoulli d'ordre 10.

On note H : «Au moins un billet gagnant au terme des dix semaines».

\bar{H} signifie «Aucun billet gagnant au terme des dix semaines».

\bar{H} est associé au chemin à 10 branches :

$$\bar{S} \xrightarrow{0,97} \bar{S} \xrightarrow{0,97} \bar{S} \dots \dots \xrightarrow{0,97} \bar{S}.$$

Ainsi : $P(\bar{H}) = 0,97^{10}$;

d'où $P(H) = 1 - 0,97^{10} \approx 0,2626$.

• **Conclusion** : la meilleure stratégie est celle d'Anna.

EXERCICES

Application (page 324)

1 E est réalisé par six chemins associés à des issues de même probabilité :

→ V → O → B ; → V → B → O ; → O → V → B ;

→ O → B → V ; → B → V → O ; → B → O → V.

$$P(E) = 6 \times \frac{16}{25} \times \frac{8}{25} \times \frac{1}{25} \text{ soit } P(E) = \frac{768}{15625}.$$

2. Lors du lancer d'une volée de trois fléchettes :

– soit on atteint trois fois la même zone (D),

– soit on atteint les trois zones (E),

– soit on atteint exactement deux zones (F).

$$P(D) + P(E) + P(F) = 1$$

$$\text{d'où } P(F) = 1 - P(D) - P(E).$$

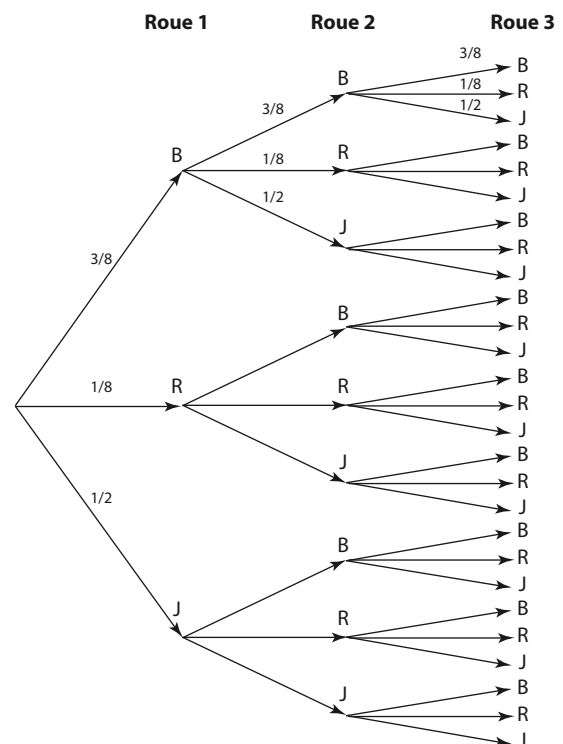
$$\text{Ainsi : } P(F) = 1 - \frac{4609}{15625} - \frac{768}{15625} = \frac{10248}{15625}.$$

Remarque : le calcul de P(F) à partir de l'arbre complet de l'exercice résolu A et des 18 chemins qui conduisent à la réalisation de F est une méthode possible mais fastidieuse.

3. Loi de Z :

k	1	2	3
P(Z = k)	$\frac{4609}{15625}$	$\frac{10248}{15625}$	$\frac{768}{15625}$

2 1. Arbre pondéré :



2. a) Loi de G :

k	0	8	20	64	1024
$P(G = k)$	$\frac{348}{512}$	$\frac{72}{512}$	$\frac{64}{512}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{1}{512}$

Remarque : pour $P(X = 0)$, il est plus simple de calculer le complément à 1 de la somme des autres probabilités que d'utiliser le calcul des probabilités à partir des différents chemins.

b) $E(G) = 9$ (en €).

Cette loterie est favorable à l'organisateur.

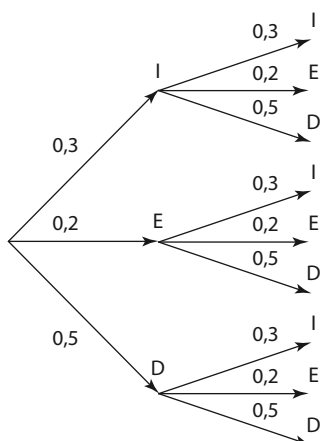
L'organisateur reçoit 12 € par ticket donc il peut espérer un bénéfice moyen de 3 € par ticket.

3 1. On utilise les chemins indiqués :

- $\rightarrow I \rightarrow I$; ainsi $[P(I)]^2 = 0,09$ donc $P(I) = 0,3$;
- $\rightarrow I \rightarrow E$ et $\rightarrow E \rightarrow I$; ainsi $2P(I) \times P(E) = 0,12$ d'où $P(E) = 0,2$.

D'après la loi des nœuds : $P(D) = 1 - P(I) - P(E)$; donc $P(D) = 0,5$.

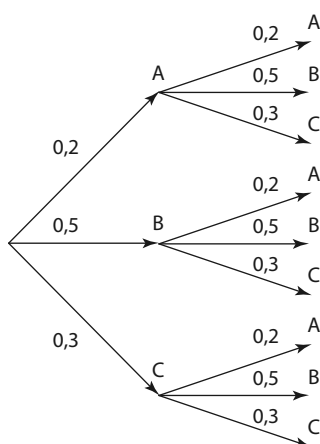
Arbre pondéré :



2. $P(A) = [P(D)]^2$ donc $P(A) = 0,25$.

$P(B) = 2P(E) \times P(D)$ donc $P(B) = 0,2$.

4 1. a) Arbre pondéré :



b) L'événement «Le joueur réussit tous ses tirs» est représenté par le chemin $\rightarrow A \rightarrow A$. Sa probabilité est $[P(A)]^2 = 0,04$.

2. a) X prend les valeurs 6, 7, 8, 9, 10.

b) Loi de X :

k	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,09	0,30	0,37	0,20	0,04

c) $P(X \geq 8) = 0,61$. La probabilité que le joueur réussisse son entraînement est 0,61.

5 1. La prise de commande par un client est une épreuve de Bernoulli où la probabilité de succès est $p = 0,1$. Chaque jour, cette épreuve est répétée 8 fois de façon indépendante donc on est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8. X indique le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,1)$.

2. $P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^6 \approx 0,1488$.

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$P(X < 2) = 0,9^8 + \binom{8}{1} \times 0,1 \times 0,9^7 \approx 0,8131$.

6 1. On note a le nombre de boules blanches.

L'urne contient a boules blanches et 3a boules noires.

D'où la probabilité de tirer une boule noire : $p = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$.

2. a) L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 3 où la probabilité de succès (tirage d'une boule noire lors d'une épreuve) est $p = \frac{3}{4}$.

N indique le nombre de succès donc N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; \frac{3}{4})$.

b) Loi de N :

k	0	1	2	3
$P(N = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

c) On note B : «Obtenir au moins deux boules blanches». B signifie «Obtenir soit une soit aucune boule noire».

Ainsi $P(B) = P(N = 1) + P(N = 0)$ donc $P(B) = \frac{5}{32}$.

7 1. a) Tableau de la situation :

	F	\bar{F}	
A	0,121	0,081	0,202
\bar{A}	0,429	0,369	0,798
	0,55	0,45	1

b) $P(A) = 0,202$.

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 6 où la probabilité de succès (événement A) lors d'une épreuve est $p = 0,202$.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'élèves parmi les six qui étudient l'allemand; X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0,202)$.

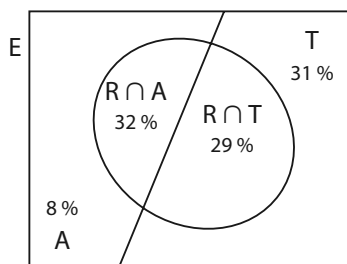
a) $P(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0,202^3 \times 0,798^3 \approx 0,084$.

b) $P(X = 0) = 0,798^6 \approx 0,258$.

c) On note D : «Au moins un élève parmi les six étudie l'allemand».

\bar{D} signifie «X = 0» donc $P(D) = 1 - P(X = 0) \approx 0,742$.

8 1. Schéma de la situation :



2. $P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap T) = 0,32 + 0,29 = 0,61$.

3. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 10 où la probabilité de succès (événement R) lors d'une épreuve est $p = 0,61$.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de candidats reçus parmi les dix; X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,61)$.

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,61^5 \times 0,39^5 \approx 0,1920$.

b) On note C : «Au moins un des candidats parmi les dix est reçu».

\bar{C} signifie «X = 0» d'où $P(C) = 1 - P(X = 0)$.

Or : $P(X = 0) = 0,39^{10} \approx 0,0001$; donc : $P(C) \approx 0,9999$.

9 1. Le franchissement d'un obstacle est une épreuve de Bernoulli où la probabilité de succès est $p = 0,625$. Lors du parcours, cette épreuve est répétée huit fois de façon indépendante donc on est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8.

X indique le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,625$.

Ainsi $E(X) = np$ soit $E(X) = 5$.

2. Durée théorique du parcours :

$t = \frac{d}{v} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (en h) donc $t = 12$ (en min).

3. a) $8 - X$ indique le nombre de passages avec faute.

$D = 12 + 1 \times (8 - X)$ soit $D = 20 - X$.

b) $E(D) = 20 - E(X)$ donc $E(D) = 15$ (en min).

Ainsi, la durée moyenne sur un grand nombre de parcours est 15 min.

10 1. La réponse au QCM est un schéma de Bernoulli d'ordre 5 où la probabilité de succès (réponse juste) à une épreuve est $p = 0,5$.

J indique le nombre de succès donc J suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,5$.

Ainsi $E(J) = np$ soit $E(J) = 2,5$.

2. a) N prend les valeurs $-5, -2, 1, 4, 7, 10$.

b) $N = 2J - 1 \times (5 - J)$ soit $N = 3J - 5$.

$E(N) = 3E(J) - 5$ donc $E(N) = 2,5$.

c) La réponse au hasard permet d'espérer en moyenne une note de 2,5.

Cette stratégie n'est pas payante.

11 1. a) I suit la loi binomiale $\mathcal{B}(256; 0,5)$.

b) $a = 112; b = 144$.

L'intervalle de fluctuation à 95% est $I = \left[\frac{112}{256}; \frac{144}{256} \right]$.

2. a) $f_{obs} = \frac{115}{256}$.

b) $f_{obs} \in I$, donc on accepte l'hypothèse $p = 0,5$.

Au seuil de 5%, l'affirmation du maire est exacte.

12 Corrigé dans le manuel.

13 1. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(428; 0,16)$.

b) $a = 54; b = 84$.

L'intervalle de fluctuation à 95% est $I = \left[\frac{54}{428}; \frac{84}{428} \right]$.

2. a) $f_{obs} = \frac{86}{428}$ donc $f_{obs} \notin I$.

On rejette au seuil de 5% l'hypothèse $p = 0,16$.

L'association de consommateurs infirme les indications du fournisseur d'accès.

Remarque : on peut aussi se poser la question de savoir si l'échantillon proposé est bien aléatoire...

b) Il s'agit de déterminer la probabilité que la fréquence soit dans la zone de rejet.

$P(E) = P(X < 54) + P(X > 84)$

$P(E) = P(X \leq 53) + 1 - P(X \leq 84)$

$P(E) \approx 0,0215 + 1 - 0,9806 \approx 0,0409$.

Ainsi P(E) est d'environ 4%.

EXERCICES

Activités de recherche (page 332)

18 En état de marche

• Les outils :

- Schéma de Bernoulli.
- Loi du nombre de succès.

• Les objectifs :

- Utiliser une variable aléatoire.
- Reconnaître une loi binomiale.
- Calculer suivant la loi binomiale.

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,9)$.

2. a) A signifie «X ≥ 2».

b) $P(A) = P(X = 2) + P(X = 3)$ donc

$P(A) = 3 \times 0,9^2 \times 0,1 + 0,9^3$ soit $P(A) = 0,972$.

19 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

• Les outils :

- Schéma de Bernoulli d'ordre n.
- Loi binomiale.
- Calcul algébrique.

• Les objectifs :

- Reconnaître une loi binomiale.
- Exprimer une probabilité suivant la loi binomiale.
- Résoudre une inéquation.

1. a) Sous les hypothèses indiquées, le modèle est un schéma de Bernoulli d'ordre n.

b) La variable aléatoire X qui indique le nombre de filles suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

2. a) \bar{A} signifie «Aucune fille lors des n naissances» c'est-à-dire « $X = 0$ ».

b) $P(\bar{A}) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit $P(\bar{A}) = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi : $P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

c) $P(A) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > 1 - \frac{1}{100}$

$P(A) > 0,99 \Leftrightarrow 2^n > 100$

La suite $(2^n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

Or : $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$;

donc pour tout entier n , $n \geq 7$, $2^n \geq 2^7 > 100$.

Ainsi, le plus petit entier solution est $n_0 = 7$.

La famille doit avoir au minimum 7 enfants pour que la probabilité d'avoir au moins une fille dépasse 0,99.

20 Loi géométrique tronquée

• **Les outils :**

– Schéma de Bernoulli d'ordre n .

– Arbre pondéré.

– Loi d'une variable aléatoire.

• **Les objectifs :**

– Reconnaître un schéma de Bernoulli.

– Déterminer la loi d'une variable aléatoire.

– Calculer son espérance mathématique.

1. Le lancer du dé est une épreuve de Bernoulli telle que

$p = P(A) = \frac{1}{6}$ et $q = P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$.

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 4 que l'on peut représenter par un arbre pondéré.

a) Nombre de chemins : $2^4 = 16$.

b) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

c) « $X = 0$ » signifie qu'au terme des quatre lancers, le $n^{\circ} 1$ n'est pas sorti.

Cet événement est représenté par :

$$\xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{5/6} \bar{A}$$

D'où : $P(X = 0) = \frac{5^4}{6^4}$.

d) « $X = 4$ » signifie que lors des trois premiers lancers, on obtient un numéro différent de 1 et que le quatrième lancer donne 1.

Cet événement est donc représenté par :

$$\xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{5/6} \bar{A} \xrightarrow{1/6} A$$

D'où : $P(X = 4) = \frac{5^3}{6^4}$.

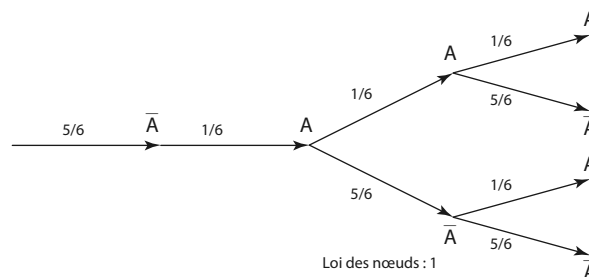
e) De même :

• « $X = 3$ » est représenté par deux chemins :



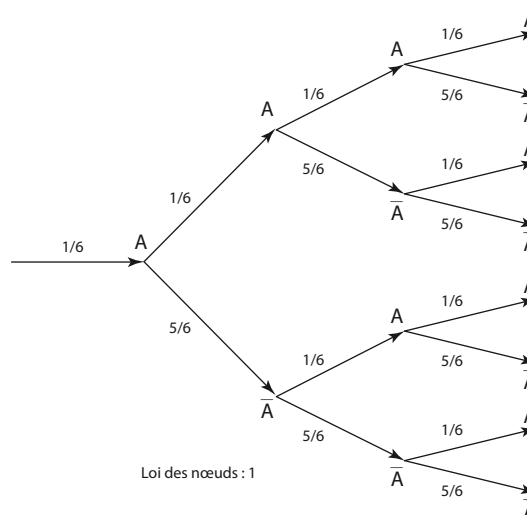
D'où $P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{5^2}{6^3}$.

• « $X = 2$ » est représenté par quatre chemins :



D'où $P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \left[\frac{1}{6}(1) + \frac{5}{6}(1) \right] = \frac{5}{6^2}$.

• « $X = 1$ » est représenté par huit chemins :



D'où $P(X = 1) = \frac{1}{6} \times \left[\frac{1}{6}(1) + \frac{5}{6}(1) \right] = \frac{1}{6}$.

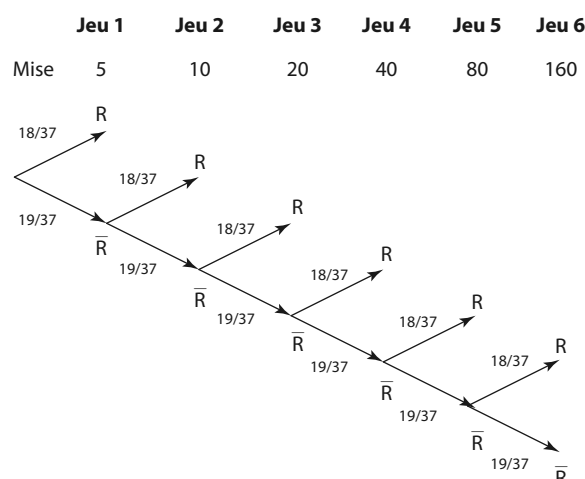
f) Loi de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$

$E(X) = \frac{763}{648} \approx 1,18$.

21 Narration de recherche

Un arbre pondéré illustre la situation :



• Si \bar{R} est réalisé six fois de suite, le joueur est ruiné.

En effet, le joueur perd le montant (en €) de ses mises successives soit : $M = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 = 315$.

On note G le gain algébrique (en €) du joueur.

G prend les valeurs -315 et $+5$.

La perte de 315 € correspond à la ruine du joueur :

$$\rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R}.$$

• Dans le cas contraire, le joueur gagne.

Le jeu s'arrête soit après la 1^{re} partie, soit après la 2^e, ..., soit après la 6^e et le gain est alors, pour chaque éventualité, de 5 €.

Loi de G :

k	-315	5
$P(G = k)$	$\left(\frac{19}{37}\right)^6$	$1 - \left(\frac{19}{37}\right)^6$

$$E(G) = \left(\frac{19}{37}\right)^6 \times (-315) + 5 \left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^6\right) \approx -0,87 \text{ (en €)}.$$

L'espérance de gain est négative ; on pouvait s'en douter !

Remarque : si un joueur possède une somme infinie, cette stratégie peut le conduire à penser qu'en misant très gros et en suivant cette démarche, il finira bien par gagner le montant de sa mise initiale... Pour rendre inopérante cette martingale, la parade des casinos est l'instauration de mises maximales autorisées.

22 Narration de recherche

• Loto 15

Le remplissage au hasard d'une grille simple définit un schéma de Bernoulli d'ordre 15 où la probabilité de succès lors du pronostic sur un match est $p = \frac{1}{3}$.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes parmi les 15 ; X suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}\left(15; \frac{1}{3}\right).$$

Obtenir une grille gagnante signifie « $X \geq 12$ ».

Avec une calculatrice :

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 0,0003.$$

• Loto 7

De même, on note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes parmi les sept.

Obtenir une grille gagnante signifie « $Y \geq 6$ ».

$$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) \approx 0,0069.$$

• Ainsi, avec la stratégie de réponse au hasard, on a environ 23 fois plus de chances de gagner au Loto foot 7 qu'au Loto

foot 15. Cependant les probabilités restent faibles : moins de 7 chances sur 1 000 au Loto foot 7.

23 TP – Calculer des probabilités selon une loi binomiale

Voir page 334.

24 TP – Un dé truqué?

1. a) Feuille de calcul

• Saisir :

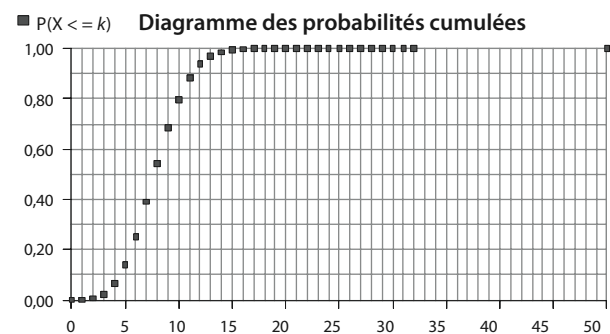
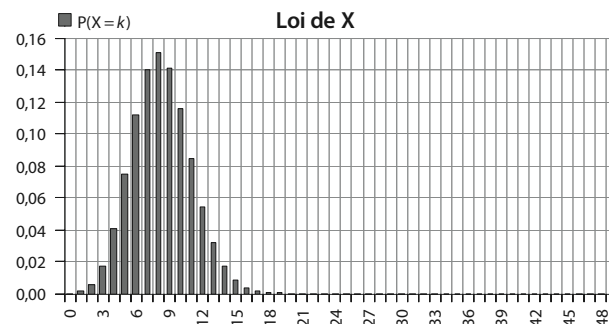
– en A2 : 0 ;

– en B2 : $=\text{LOI.BINOMIALE}(A2;50;1/6;0)$;

– en C2 : $=\text{LOI.BINOMIALE}(A2;50;1/6;1)$.

• Copier la plage de cellule A2:C2 vers le vas jusqu'en A52:C52.

b) Représentations graphiques



2. a) $a = 4$; $b = 14$.

b) Intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du 6 :

$$I = \left[\frac{4}{50}; \frac{14}{50} \right] \text{ soit } I = [0,08; 0,28].$$

c) $f_{obs} = \frac{16}{50} = 0,32$.

$f_{obs} \notin I$ donc on rejette au seuil de 5 % l'hypothèse $p = \frac{1}{6}$. On peut donc penser que le dé est truqué.

EXERCICES

Entraînement (page 336)

DE TÊTE

25 a) $P(III) = 0,1^3 = 0,001$.

b) $P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = 0,4^3 = 0,064$.

26 a) $P(\bar{F}\bar{F}\bar{F}\bar{F}\bar{F}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

b) X indique le nombre de «Face» au terme des cinq lancers.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}.$$

27 a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ donc $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$.

b) On utilise la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5} \text{ donc } \binom{11}{5} = 462.$$

28 a) Lors du tir d'une flèche, on note C l'événement « Toucher la cible ».

D'où $P(\overline{C}\overline{C}\overline{C}) = 0,2^3 = 0,008$.

b) L'événement A, « Lors de la volée, au moins une flèche est dans la cible », est l'événement contraire de « $\overline{C}\overline{C}\overline{C}$ » ; d'où $P(A) = 0,992$.

29 a) $E(X) = np$ donc $E(X) = 10$.

b) $V(X) = npq$ donc $V(X) = 80 \times 0,125 \times 0,875 = 8,75$.

RÉPÉTITION D'UNE MÊME ÉPREUVE

30 a) Nombre d'issues : $n = 3^3 = 27$.

Toutes les issues sont équiprobables.

b) U est constitué des 3 issues RRR, VVV et NNN ;

$$\text{d'où } P(U) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

T est constitué des 6 issues RVN, RNV, VRN, VNR, NRV

et NVR ; d'où $P(T) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

B est constitué des 18 issues restantes ; d'où $P(B) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

Remarques :

– Le raisonnement tenu repose sur l'équiprobabilité de toutes les issues et sur la formule de calcul :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

– On peut aussi obtenir ces résultats en utilisant un arbre pondéré pour représenter la répétition de trois épreuves identiques et indépendantes. Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de l'urne et à noter sa couleur.

Exemple : U est réalisé en suivant les chemins

$$\xrightarrow{1/3} R \xrightarrow{1/3} R \xrightarrow{1/3} R, \xrightarrow{1/3} V \xrightarrow{1/3} V \xrightarrow{1/3} V$$

$$\text{et } \xrightarrow{1/3} N \xrightarrow{1/3} N \xrightarrow{1/3} N.$$

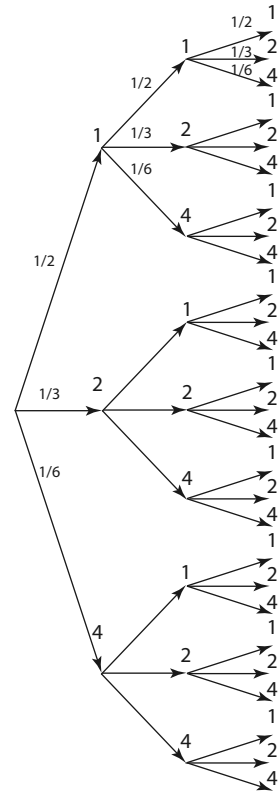
Les issues associées à ces trois chemins ont la même probabilité

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3; \text{ d'où } P(U) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}.$$

De même, $P(T) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}$ et $P(B) = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$.

31 Corrigé dans le manuel.

32 1. Arbre pondéré :



2. $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$.

B est réalisé en suivant les chemins

$$\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,$$

$$\rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \quad \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Les six issues associées à ces chemins ont la même probabilité $\frac{1}{36}$, donc $P(B) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

L'événement C a pour événement contraire \overline{C} : « Le nombre ne contient pas le chiffre 2 ».

$$P(\overline{C}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

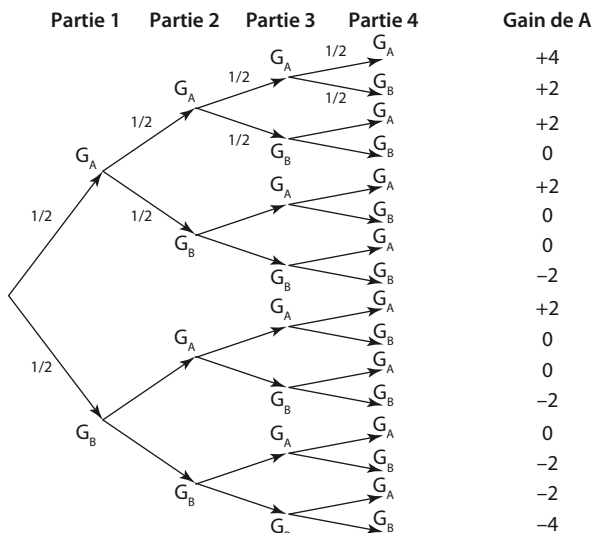
$$P(\overline{C}) = \frac{8}{27}. \text{ D'où } P(C) = \frac{19}{27}.$$

Remarque : un dénombrement direct des chemins menant à la réalisation de C est aussi possible, mais les calculs sont plus longs. L'utilisation de la loi binomiale permettra par la suite d'abrégé tous ces calculs.

3. Loi de X :

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

33 1. Arbre pondéré :



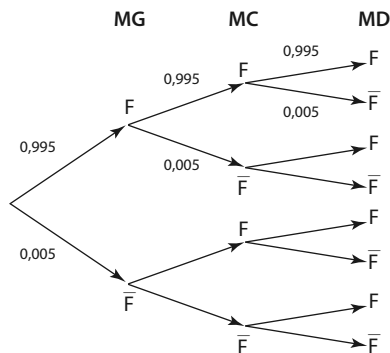
2. a) $P(X = -4) = \frac{1}{16}$.

b) Loi de X :

k	-4	-2	0	2	4
P(X = k)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c) E(X) = 0 donc le jeu est équitable.

34 1. Arbre pondéré :

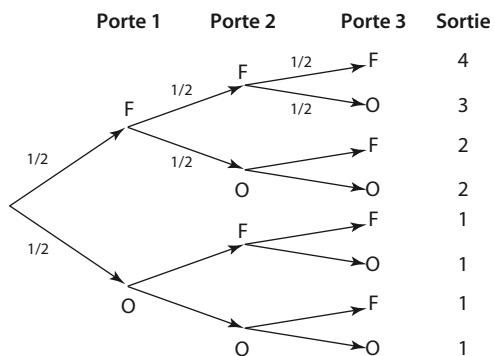


2. L'événement «L'avion s'écrase au sol», noté T, signifie que «Le moteur central et au moins un moteur d'aile ne fonctionnent pas».

Ainsi : $P(T) = P(\bar{F}\bar{F}\bar{F}) + P(F\bar{F}\bar{F}) + P(\bar{F}F\bar{F})$;
 d'où : $P(T) = 2 \times 0,005^2 \times 0,995 + 0,005^3 \approx 50 \times 10^{-6}$.

35 1. Arbre pondéré

On note O l'événement «La porte est ouverte» et F l'événement «La porte est fermée».



2. a) Loi de X :

k	-7	-2	3	13
P(X = k)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) E(X) = -2 (en €).

c) On note x le montant de la mise en euros.

La loi de X s'exprime en fonction de x.

k	-x	5-x	10-x	20-x
P(X = k)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

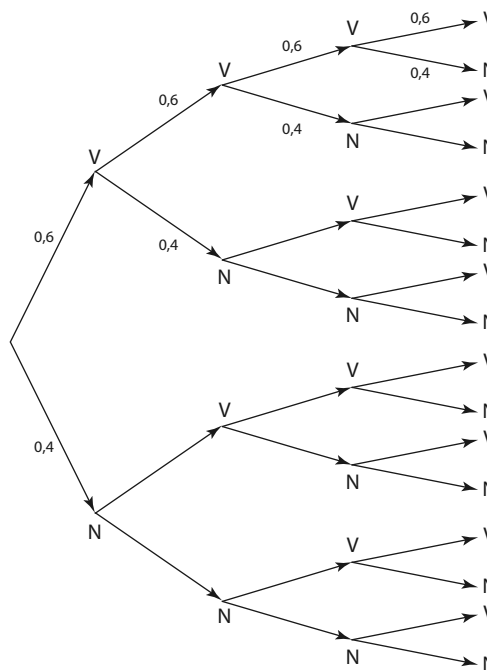
D'où : $E(X) = -\frac{x}{2} + \frac{5-x}{4} + \frac{10-x}{8} + \frac{20-x}{8} = \frac{40-8x}{8}$.

E(X) = 0 \Leftrightarrow x = 5.

Ainsi, le jeu est équitable pour une mise de 5 €.

LOI GÉOMÉTRIQUE TRONQUÉE

36 1. a)



b) «X = 0» signifie «NNNN», donc $P(X = 0) = 0,4^4 = 0,0256$.

c) Par lecture sur l'arbre :

$P(X = 4) = 0,4^3 \times 0,6$;

$P(X = 3) = 0,4^2 \times 0,6 \times (0,6 + 0,4) = 0,4^2 \times 0,6$;

$P(X = 2) = 0,4 \times 0,6 \times (0,6 \times 1 + 0,4 \times 1) = 0,4 \times 0,6$;

$P(X = 1) = 0,6 \times (0,6 \times 1 + 0,4 \times 1) = 0,6$.

D'où la loi de X :

k	0	1	2	3	4
P(X = k)	0,0256	0,6	0,24	0,096	0,0384

2. Si on applique à l'arbre «réduit» les règles de calcul des probabilités, on obtient directement :

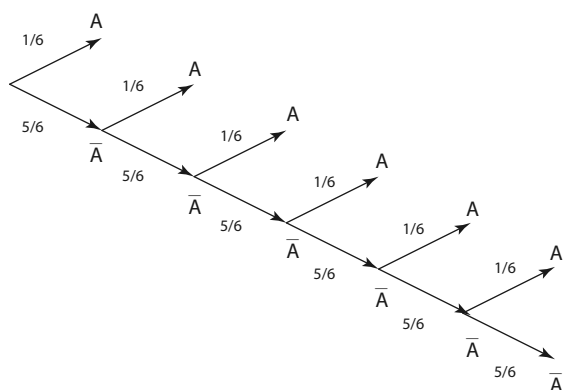
$$P(X=0) = 0,4^4; P(X=4) = 0,4^3 \times 0,6; P(X=3) = 0,4^2 \times 0,6; P(X=2) = 0,4 \times 0,6; P(X=1) = 0,6.$$

C'est l'utilisation de la loi des nœuds qui a permis «la simplification» des calculs détaillés au 1. c).

37 Corrigé dans le manuel.

38 1. Arbre pondéré

Lors d'un lancer du dé cubique parfait, on note A l'événement «Sortie du 6» et \bar{A} l'événement contraire.



2. a) On note T l'événement : «La tortue gagne».

T signifie « $\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ », d'où $P(T) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,335$.

Remarque : la tortue a environ 1 chance sur 3 de gagner.

b) On note L l'événement : «Le lièvre gagne».

L est l'événement contraire de T,

$$\text{donc } P(L) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665.$$

3. a) Loi de N :

k	0	1	2	3	4	5	6
P(N = k)	$\frac{5^6}{6^6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^4}$	$\frac{5^4}{6^5}$	$\frac{5^5}{6^6}$

$$b) E(N) = \frac{1}{6} + \frac{10}{6^2} + \frac{75}{6^3} + \frac{500}{6^4} + \frac{3125}{6^5} + \frac{3125}{6^5} \approx 1,98.$$

Ainsi, sur un grand nombre de simulations de courses, il faut en moyenne moins de 2 lancers pour que le lièvre soit vainqueur.

39 1. La boucle conditionnelle précise que : tant que l'atome ne s'est pas désintégré ($T = 0$) et que le nombre d'unités de temps n'atteint pas 100 ($C < 100$), on simule sa désintégration.

2. Les conditions du protocole sont évoquées par l'instruction conditionnelle «if ... then ...else...».

Si la désintégration n'a pas lieu, on met en mémoire de liste 0 pour la n-ième simulation, sinon on y met la valeur de C qui indique au bout de combien de temps s'est produite cette désintégration.

3. a) On écrit le programme sur la calculatrice.

b) On peut estimer la durée moyenne de désintégration à environ 14 unités de temps.

$$\text{Remarque : } \frac{1}{p} = \frac{1}{0,07} \approx 14,29.$$

LOI BINOMIALE

40 X est la variable aléatoire donnant le nombre d'as.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

41 X est la variable aléatoire donnant le nombre de flèches qui touchent la cible.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \frac{7}{10}\right)$.

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{7}{10}\right)^3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3087}{10000}.$$

42 X est la variable aléatoire donnant le nombre de cœurs.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{4}\right)$.

$$P(X=5) = \binom{8}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{189}{8192}.$$

43 Corrigé dans le manuel.

44 Loi de X :

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,0467	0,1866	0,3110	0,2765	0,1382	0,0369	0,0041

45 Loi de X :

k	0	1	2	3	4
P(X = k)	0,0003	0,0035	0,0212	0,0743	0,1672
k	5	6	7	8	9
P(X = k)	0,2508	0,2508	0,1612	0,0605	0,0101

46 $P(X=8) \approx 0,0138$; $P(X=12) \approx 0,2501$.

47 $E(X) = np$ d'où $p = \frac{E(X)}{n} = 0,3$.

$$P(X \leq 3) \approx 0,6496;$$

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 0,0106.$$

48 $\sigma^2(X) = np(1-p)$ d'où $n = \frac{\sigma^2(X)}{p(1-p)} = \frac{4}{0,16} = 25$.

$$P(X \leq 2) \approx 0,0982;$$

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) \approx 0,0274.$$

49 1. X est la variable aléatoire donnant le nombre de pannes durant un an.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,05)$.

$$P(X=0) \approx 0,540.$$

$$2. P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,118.$$

50 1. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 4 où la probabilité de succès lors d'une épreuve est $p = \frac{1}{6}$.

On note A : «Obtenir au moins un six en quatre lancers».

\bar{A} signifie «Obtenir aucun six en quatre lancers».

$$P(\bar{A}) = (1-p)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4,$$

$$\text{d'où } P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518.$$

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 24.

L'épreuve associée est le lancer de deux dés avec pour issues S « Obtenir un double six » et \bar{S} ; $p' = P(S) = \frac{1}{36}$.

a) L'événement B « Obtenir aucun double six » est représenté par le chemin à 24 branches

$$\xrightarrow{35/36} \bar{S} \xrightarrow{35/36} \bar{S} \dots \xrightarrow{35/36} \bar{S} \xrightarrow{35/36} \bar{S}.$$

D'où $P'(B) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

b) L'événement C « Obtenir au moins un double six » est l'événement contraire de B.

D'où $P'(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$.

Ainsi : $P(A) > P'(C)$; on a plus de chances d'obtenir au moins un six en lançant un dé cubique quatre fois, que d'obtenir au moins un double six en lançant deux dés vingt-quatre fois.

51 1. $P(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 10 où la probabilité de succès lors d'une épreuve est $p = \frac{1}{6}$.

X est la variable aléatoire donnant le nombre de réalisations de S lors des dix épreuves.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{6}\right)$.

$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,155$.

3. a) On considère ici un schéma de Bernoulli d'ordre n.

On note A :

« Obtenir au moins une fois S lors des n épreuves ».

Ainsi \bar{A} signifie :

« Obtenir aucune fois S au terme des n épreuves ».

\bar{A} est représenté par le chemin à n branches

$$\xrightarrow{5/6} \bar{S} \xrightarrow{5/6} \bar{S} \dots \xrightarrow{5/6} \bar{S} \xrightarrow{5/6} \bar{S}.$$

Ainsi $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ donc $P_n = P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) $P_n > 0,9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 1 - 0,1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$.

La suite $(q^n)_{n \geq 1}$ avec $q = \frac{5}{6}$ est décroissante.

Or : $\left(\frac{5}{6}\right)^{12} > 0,1$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^{13} < 0,1$;

donc pour tout entier n, $n \geq 13$, $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{13} < 0,1$.

Ainsi, le nombre minimum d'épreuves pour que la probabilité de A dépasse 0,9 est $n_0 = 13$.

52 1. X indique le nombre de boules rouges lors des 15 tirages donc 15 - X donne le nombre de boules vertes.

$G = -20X + 10(15 - X)$ soit $G = 150 - 30X$.

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 15 où la probabilité de succès lors d'une épreuve est $p = \frac{2}{5}$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(15; \frac{2}{5}\right)$.

D'où $E(X) = np$ soit $E(X) = 6$.

3. $E(G) = 150 - 30E(X)$ donc $E(G) = -30$ (en €).

53 1. E est l'univers constitué des puces produites dans la journée.

On considère les événements A « La puce a le défaut a » et B « La puce a le défaut b ».

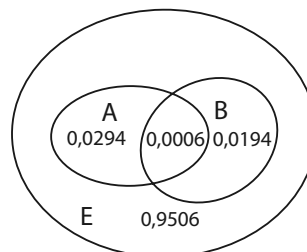
$P(A \cup B) = 0,9506$ donc $P(A \cup B) = 0,0494$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

d'où : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = 0,03 + 0,02 - 0,0494 = 0,0006$.

Schéma de la situation :



2. a) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,0494)$.

b) $E(X) = np$ donc $E(X) = 4,94$.

Z est la variable aléatoire qui indique le nombre de puces sans défaut dans le lot.

$Z = 100 - X$ d'où $E(Z) = 100 - E(X) = 95,06$.

Ainsi, en moyenne, sur un grand nombre de lots de 100 puces, environ 95 puces sont sans défaut.

3. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(800; 0,0494)$.

$P(Y > n) \leq 0,05 \Leftrightarrow 1 - P(Y \leq n) \leq 1 - 0,95$

$P(Y > n) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(Y \leq n) \geq 0,95$.

Par tabulation à la calculatrice selon la loi binomiale des probabilités cumulées $P(Y \leq n)$, on obtient $n \geq 50$.

L'entier cherché est $n_0 = 50$.

Ainsi, la probabilité que le lot de 800 puces contienne plus de 50 puces en mauvais état de fonctionnement ne dépasse pas 5%.

54 Corrigé dans le manuel.

55 1. Le but de cet algorithme est de tabuler la loi de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

2. a) Programme sur calculatrice

• CASIO

• TI

```

=====C13EX055=====
"N":?>N#
"P":?>P#
For 0<K To N#
NCK*P^K*(1-P)^(N-K)->R
"PROBABILITE POUR K="
K#
"=":R#
Next K#
"FIN"
TOP|BTM|SRC|MENU|<=>|CHAR
    
```

```

PROGRAM: C13EX055
:Prompt N
:Prompt P
:For(K,0,N)
:  N Combinations K
:*P^K*(1-P)^(N-K)
->R
:Disp "PROB FOUR
K=",K:Pause
:Disp "=",R:Pause
:End
    
```

b) Test du programme

• $n = 3, p = 0,5$

k	0	1	2	3
Probabilité	0,125	0,375	0,375	0,125

• $n = 10, p = 0,1$

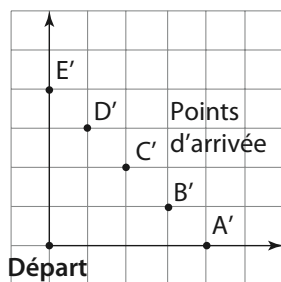
k	0	1	2	3	4	5
Probabilité	0,348 678	0,387 420	0,193 710	0,057 396	0,011 160	0,001 488
k	6	7	8	9	10	
Probabilité	0,000 138	9×10^{-6}	4×10^{-7}	9×10^{-9}	1×10^{-10}	

Ces valeurs sont en accord avec le programme intégré de la calculatrice.

COEFFICIENTS BINOMIAUX

56 1. a) Nombre de chemins possibles : $N = 2^4 = 16$.

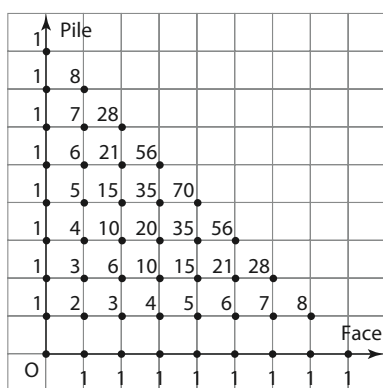
b) Représentation des points d'arrivée possibles :



2. Dénombrement des chemins :

Arrivée	A'	B'	C'	D'	E'
Chemins	DDDD	DDDH DDHD DHDD HDDD	DDHH DHDH DHHD HDDH HDHD HHDD	DHHH HDHH HHDH HHHD	HHHH
Nombre	1	4	6	4	1

57 1. Codage des points ($n = 8$) :



2. Les points d'arrivée ont pour coordonnées $(k; 8 - k)$ pour k entier tel que $0 \leq k \leq 8$.

3. On reconnaît le triangle de Pascal.

Ainsi les points d'arrivée sont codés par les coefficients binomiaux $\binom{8}{k}$ pour $0 \leq k \leq 8$.

Remarque : tout point d'arrivée est du type $A_k(k; 8 - k)$ avec $0 \leq k \leq 8$. Il représente l'événement « Obtenir k fois Face en 8 lancers de la pièce ».

Ainsi, le nombre de chemins conduisant à A_k est celui des issues qui conduisent à k succès (Face) en 8 répétitions du lancer de la pièce. On retrouve la définition du nombre $\binom{8}{k}$.

58 Corrigé dans le manuel.

59 Triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

a) On lit dans le triangle de Pascal : $\binom{n}{2} = 36$ pour $n = 9$.

b) On utilise les colonnes donnant $\binom{n}{4}$ et $\binom{n}{2}$.

$$3 \binom{10}{4} = 3 \times 210 = 630$$

$$\text{et } 14 \binom{10}{2} = 14 \times 45 = 630; \text{ d'où } n = 10.$$

Remarque : l'expression des entiers $\binom{n}{k}$ en fonction de n et k n'est pas au programme de 1^{re} S. L'objectif d'un tel exercice est la simple utilisation d'un tableau de nombres et le repérage des coefficients binomiaux pour mettre en évidence des valeurs qui conviennent. L'unicité de la valeur trouvée, affirmée dans l'énoncé, peut être admise à ce niveau.

60 1. On pose $S = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$.

Or : $\binom{3}{3} = 1 = \binom{4}{4}$; donc :

$$S = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}.$$

$$S = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$$

$$S = \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$$

$$S = \binom{7}{4} + \binom{7}{3}$$

$$S = \binom{8}{4}.$$

Par applications successives de la formule de Pascal

Ainsi : $n = 8$ et $p = 4$.

2. Dans le triangle de Pascal, la somme des entiers de la colonne 3 jusqu'à la ligne 7 est égale au coefficient associé à la colonne suivante et à la ligne suivante.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Remarque : dans le cas général, on a donc

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+i}{k} = \binom{k+1+i}{k+1}.$$

L'exemple traité correspond à $k = 3$ et $i = 4$.

PRISE DE DÉCISION

61 1. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves qui utilisent Internet pour leurs devoirs, sur un échantillon aléatoire de taille 64.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(64; 0,52)$.

– Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est $a = 25$.

– Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 41$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence est :

$$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right] \text{ soit } I = \left[\frac{25}{64}; \frac{41}{64} \right].$$

2. L'intervalle de fluctuation vu en Seconde est défini par

$$J = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ soit ici : } J = [0,395; 0,645].$$

$$\text{Or : } \frac{25}{64} \approx 0,390 \text{ et } \frac{41}{64} \approx 0,641;$$

donc les intervalles I et J sont peu différents.

$$3. f_{\text{obs}} = \frac{42}{64}.$$

$f_{\text{obs}} \notin I$ donc on rejette au seuil de 5 % l'hypothèse $p = 0,52$.

On peut penser que les classes de ce professeur constituent un échantillon que l'on ne peut pas valider au seuil de 5 %.

62 1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80; 0,15)$.

2. L'intervalle de fluctuation à 95 % est :

$$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right] \text{ avec } n = 80, a = 6 \text{ et } b = 19.$$

Ainsi, les limites de contrôle sont 0,075 et 0,2375.

3. Il s'agit d'évaluer la probabilité $P(E)$ qu'une fréquence soit dans la zone de rejet.

$$P(E) = P(X < 6) + P(X > 19)$$

$$= P(X \leq 5) + 1 - P(X \leq 19)$$

$$\text{Or : } P(X \leq 5) \approx 0,0140 \text{ et } P(X \leq 19) \approx 0,9868;$$

$$\text{donc : } P(E) \approx 0,0272.$$

Ainsi, la probabilité de commettre une erreur de décision est d'environ 2,72 %.

AVEC LES TICE

63 1. a) En B3 : $\boxed{30}$; en D3 : $\boxed{0,4}$

b) c) Voir page 342.

2. Intervalle selon la loi binomiale : $I = [0,23; 0,57]$.

Intervalle selon la formule de 2^{de} : $J = [0,22; 0,58]$.

Les intervalles de fluctuation sont très proches avec ici $I \subset J$.

3. Utilisation du programme

	p	n	I (loi binomiale)	J (2^{de})
a)	30	0,6	[0,43; 0,77]	[0,42; 0,78]
b)	30	0,85	[0,70; 0,97]	[0,67; 1,03] on retient [0,67; 1]
c)	100	0,15	[0,08; 0,22]	[0,05; 0,25]
d)	100	0,55	[0,45; 0,65]	[0,45; 0,65]
e)	500	0,22	[0,18; 0,26]	[0,18; 0,26]
f)	500	0,9	[0,87; 0,93]	[0,86; 0,94]

Les intervalles de confiance I et J sont en général très proches.

Plus la taille n de l'échantillon est grande, plus la coïncidence semble précise.

ROC Restitution organisée de connaissances

64 1. Un chemin qui conduit à 3 succès au terme de 6 répétitions d'une épreuve de Bernoulli est de l'un des types suivants :

Nombre de succès durant les trois premières épreuves	Nombre de succès durant les trois dernières épreuves	Dénombrément des chemins
0	3	$\binom{3}{0} \times \binom{3}{3} = \binom{3}{0}^2$
1	2	$\binom{3}{1} \times \binom{3}{2} = \binom{3}{1}^2$
2	1	$\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = \binom{3}{2}^2$
3	0	$\binom{3}{3} \times \binom{3}{0} = \binom{3}{3}^2$

2. Par définition, le nombre de chemins conduisant à 3 succès au terme de 6 répétitions est $\binom{6}{3}$.

Or le dénombrement de la question 1. conduit à la somme $\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2$.

$$\text{Donc } \binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = \binom{6}{3}.$$

• Application

Dans le triangle de Pascal, la somme des carrés des coefficients de la ligne 3 est égale au coefficient de la ligne 6 (indice double) et de la colonne 3.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Remarque : dans le cas général,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Pour les chemins conduisant à 4 succès en 8 répétitions, on obtient par la même méthode :

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{8}{4}.$$

Prendre toutes les initiatives

65 On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses exactes aux dix questions.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{10}{3} \times \frac{1}{2^{10}},$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{10}{7} \times \frac{1}{2^{10}}.$$

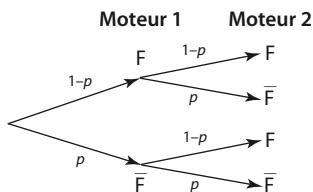
Or $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ donc $P(X = 7) = P(X = 3)$.

Dans la stratégie de réponse au hasard, un élève a autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de répondre exactement à 7.

66 Le fonctionnement d'un moteur est une épreuve à deux issues : F «Le moteur fonctionne» et \bar{F} l'événement contraire.

• Avion bimoteur

La situation est représentée par l'arbre pondéré :



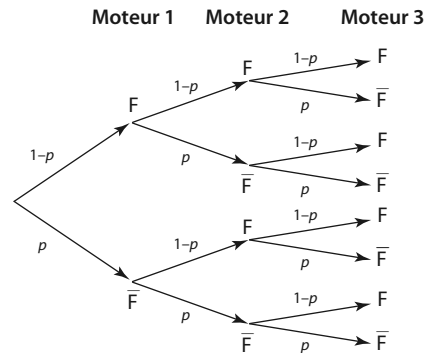
L'événement V_A «L'avion peut achever son vol» est réalisé lorsqu'au moins un des moteurs fonctionne.

\bar{V}_A est alors représenté par le chemin $\rightarrow \bar{F} \rightarrow \bar{F}$.

D'où : $P(\bar{V}_A) = p^2$ et $P(V_A) = 1 - p^2$.

Ainsi : $P(V_A) = 1 - 10^{-6} = 0,999\,999$.

• Avion trimoteur



V_B est réalisé lorsque deux ou trois moteurs fonctionnent.

V_B est représenté par les chemins

$\rightarrow F \rightarrow F \rightarrow \bar{F}$, $\rightarrow F \rightarrow \bar{F} \rightarrow F$, $\rightarrow \bar{F} \rightarrow F \rightarrow F$ et $\rightarrow F \rightarrow F \rightarrow F$.

D'où : $P'(V_B) = 3p(1-p)^2 + (1-p)^3$.

Ainsi : $P'(V_B) = 3 \times 0,001 \times 0,999^2 + 0,999^3 \approx 0,999\,997$.

$P(V_A) > P'(V_B)$, donc dans les conditions indiquées, le bimoteur est plus fiable que le trimoteur.

• Cas général : on compare $P(V_A)$ et $P'(V_B)$.

$$P(V_A) - P'(V_B) = 1 - p^2 - 3p(1-p)^2 - (1-p)^3$$

$$P(V_A) - P'(V_B) = 2p^2 - 2p^3 = 2p^2(1-p).$$

Or : $0 < p < 1$; donc : $1-p > 0$ et $2p^2 > 0$.

Ainsi $P(V_A) - P'(V_B) > 0$, donc le résultat est valable pour toute valeur de p : le bimoteur A est plus fiable que le trimoteur B.

Remarque : la solution proposée utilise des arbres pondérés pour illustrer les situations.

On peut aussi raisonner en faisant intervenir la variable aléatoire indiquant le nombre de moteurs en panne et une loi binomiale.

67 • Situation 1 : achat d'un appareil

On note G_1 : «Avoir un billet gagnant».

$$P(G_1) = \frac{50}{500} = 0,1.$$

• Situation 2 : achat de deux appareils

On note G_2 : «Avoir au moins un billet gagnant».

\bar{G}_2 signifie «N'avoir aucun billet gagnant».

$$P(\bar{G}_2) = \frac{450 \times 449}{500 \times 499} = \frac{4041}{4990}$$

$$\text{d'où } P(G_2) = \frac{949}{4990} \text{ soit } P(G_2) \approx 0,19.$$

On constate que le fait d'acheter deux appareils ne double pas les chances de gagner.

68 1. a) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20; \frac{1}{k}\right)$.

b) $E(X) = np$ donc $E(X) = \frac{20}{k}$.

2. X indique le nombre de réponses exactes parmi les vingt, donc $20 - X$ donne le nombre de réponses inexactes.

$N = X - 0,5(20 - X)$ soit $N = 1,5X - 10$.

Remarque : la note au test peut être négative.

b) $E(N) = 1,5E(X) - 10$ donc $E(N) = \frac{30}{k} - 10$.

c) La condition s'écrit $E(N) = 5$ soit $\frac{30}{k} - 10 = 5$.

D'où $k = 2$.

Ainsi, lorsqu'à chaque question on propose deux réponses, la stratégie de réponse au hasard conduit en moyenne à la note de 5 sur 20.

69 Corrigé dans le manuel.

70 1. a) Le remplissage de la grille définit un schéma de Bernoulli d'ordre 4 où la probabilité de succès lors d'une épreuve est $p = \frac{1}{8}$.

X indique le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{8}\right)$.

b) Loi de X :

k	0	1	2	3	4
P(X = k)	$\frac{2401}{4096}$	$\frac{1372}{4096}$	$\frac{294}{4096}$	$\frac{28}{4096}$	$\frac{1}{4096}$

c) L'événement S «Avoir une grille gagnante» signifie « $X \geq 2$ ».

$P(S) = \frac{323}{4096}$ soit $P(S) \approx 0,0789$.

2. a) Loi de G :

k	-1	1	29	999
P(G = k)	$\frac{3773}{4096}$	$\frac{294}{4096}$	$\frac{28}{4096}$	$\frac{1}{4096}$

b) $E(G) = -\frac{417}{1024}$ soit $E(G) \approx -0,41$ (en €).

3. On est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 7 où la probabilité de gagner un jour donné est $p = P(S) = \frac{323}{4096}$.

On note A : «Gagner au moins une fois dans la semaine».

\bar{A} signifie «On perd chaque jour de la semaine».

$P(\bar{A}) = (1 - p)^7$ d'où $P(A) = 1 - (1 - p)^7$.

D'où $P(A) \approx 0,4373$.

71 1. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de relais en état de marche dans le système à 5 relais.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; p)$.

$P_5 = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$P_5 = \binom{5}{3}p^3q^2 + \binom{5}{4}p^4q + \binom{5}{5}p^5$

$P_5 = 10p^3q^2 + 5p^4q + p^5$

2. Y est la variable aléatoire qui indique le nombre de relais en état de marche dans le système à 3 relais.

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$.

$P_3 = P(Y = 2) + P(Y = 3)$

$P_3 = \binom{3}{2}p^2q + \binom{3}{3}p^3$ soit $P_3 = 3p^2q + p^3$.

3. a) On exprime $P_5 - P_3$ en fonction de p :

$P_5 - P_3 = 10p^3(1 - p)^2 + 5p^4(1 - p) + p^5 - 3p^2(1 - p) - p^3$

$P_5 - P_3 = 6p^5 - 15p^4 + 12p^3 - 3p^2$.

Par factorisation à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$P_5 - P_3 = 3p^2(p - 1)^2(2p - 1)$.

b) Il s'agit de résoudre l'inéquation $P_5 > P_3$.

$P_5 - P_3 > 0 \Leftrightarrow 3p^2(p - 1)^2(2p - 1) > 0$.

Or : pour tout p, $3p^2(1 - p)^2 > 0$;

donc : $P_5 - P_3 > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$.

Ainsi le système à 5 relais est préférable à celui à 3 lorsque $\frac{1}{2} < p < 1$.

72 1. Loi de X_k :

t	1	0
P(X_k = t)	p	1 - p

$E(X_k) = p$.

Remarque : X_k est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Chaque X_k prend la valeur 1 lorsque S est réalisé à la k^e épreuve, 0 sinon.

Donc la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ indique le nombre de succès au terme des n épreuves.

Ainsi : $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$.

Remarque : comme en algorithmique, les variables aléatoires X_k servent de compteurs.

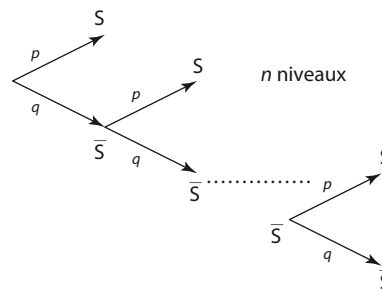
3. $E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ (voir l'exercice 68 du chapitre 12).

Or : pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, $E(X_k) = p$.

Donc $E(X) = np$.

73 1. a) Arbre pondéré «réduit» :

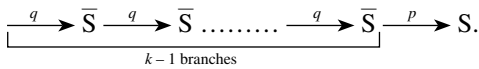


• « $X = 0$ » est représenté par le chemin à n branches

$\xrightarrow{q} \bar{S} \xrightarrow{q} \bar{S} \dots \bar{S} \xrightarrow{q} \bar{S}$

Donc $P(X = 0) = q^n$.

- Pour tout entier k , $1 \leq k \leq n$, l'événement « $X = k$ » est représenté par le chemin à k branches



Donc : $P(X = k) = q^{k-1}p$.

b) $\sum_{k=0}^n P(X = k) = q^n + p + qp + \dots + q^{n-1}p$

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = q^n + p(1 + q + \dots + q^{n-1})$$

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = q^n + p \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = q^n + p \times \frac{1 - q^n}{p}$$

Donc $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.

2. Loi de X :

k	0	1	2	3	...	n
$P(X = k)$	q^n	p	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$

$$E(X) = p + 2qp + 3q^2p + \dots + nq^{n-1}p$$

$$E(X) = p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1})$$

3. a) Pour tout x de l'intervalle I , $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.
On reconnaît la somme des $n + 1$ premières puissances de x ($0 < x < 1$).

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

b) f est une fonction polynôme définie sur I donc f est dérivable sur I .

- Calcul 1 : dérivation d'une fonction polynôme

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} \quad [1]$$

- Calcul 2 : formule de dérivation d'un quotient

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ d'où :}$$

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad [2]$$

4. a) En utilisant l'expression [1], on constate que :

$$E(X) = pf'(q)$$

b) D'où, en utilisant l'expression [2] :

$$E(X) = p \times \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}$$

Or $(q-1)^2 = (1-q)^2 = p^2$ donc :

$$E(X) = \frac{1}{p} [n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1]$$

$$E(X) = \frac{1}{p} [1 + (1-p)^n (n(1-p) - (n+1))]$$

$$E(X) = \frac{1}{p} [1 + (1-p)^n (-np - 1)]$$

$$E(X) = \frac{1}{p} [1 - (1+np)(1-p)^n]$$

74 **1.** (Q_1) implique que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

$Z = n - X$ prend les valeurs entières de 0 à n .

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$,

l'événement « $Z = k$ » signifie « $n - X = k$ » soit « $X = n - k$ ».

$$P(Z = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)}$$

$$\text{Or } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ donc } P(Z = k) = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}$$

$$\text{D'où } P(Z = k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$$

Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; q)$.

Ainsi, l'implication (Q_1) \Rightarrow (Q_2) est vraie.

2. Y prend les valeurs de 0 à n donc $\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1$.

Il en résulte que $\sum_{k=1}^n P(Y = k) = 1 - P(Y = 0)$.

Or : $0 < p < 1$,

donc $P(Y = 0) = (1-p)^n$ est strictement positif.

On en déduit que $\sum_{k=1}^n P(Y = k) < 1$.

Ainsi l'implication (Q_1) \Rightarrow (Q_2) est fautive.

3. L'événement A signifie : « $X > h$ » et « $X \leq k$ ».

Ainsi : $P(A) = P(\text{«}X > h\text{»} \cap \text{«}X \leq k\text{»})$.

D'après la formule $P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C)$,

$$P(A) = P(X > h) + P(X \leq k) - P(\text{«}X > h\text{»} \cup \text{«}X \leq k\text{»})$$

On remarque :

$$- P(X > h) = 1 - P(X \leq h);$$

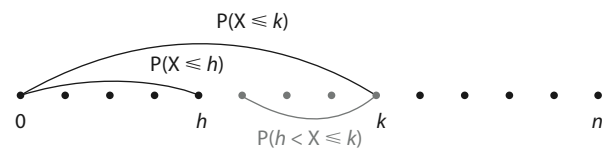
- comme $h < k$, l'événement « $X > h$ » ou « $X \leq k$ » est certain donc $P(\text{«}X > h\text{»} \cup \text{«}X \leq k\text{»}) = 1$.

D'où $P(A) = 1 - P(X \leq h) + P(X \leq k) - 1$,

$$\text{soit } P(A) = P(X \leq k) - P(X \leq h)$$

Ainsi, l'implication (Q_1) \Rightarrow (Q_2) est vraie.

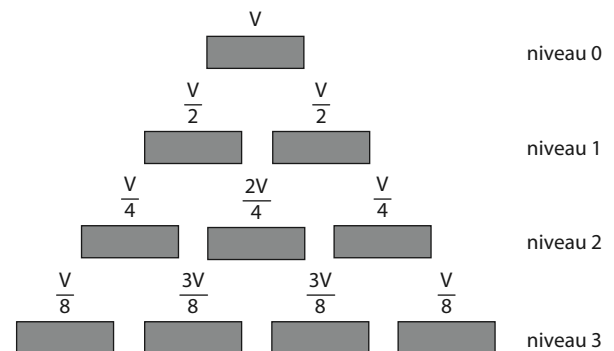
Illustration :



75 L'alimentation se fait à débit constant.

On note V le volume d'eau qui alimente la fontaine par unité de temps.

Schéma de la répartition dans chaque vasque :



Niveau	Coefficient de proportionnalité	Coefficient binomiaux
0	$\frac{1}{V}$	1
1	$\frac{2}{V}$	1 1
2	$\frac{4}{V}$	1 2 1
3	$\frac{8}{V}$	1 3 3 1

À chaque niveau, les volumes d'eau reçus par chaque vasque sont donc proportionnels aux coefficients du triangle de Pascal.

Remarque : on peut ainsi conjecturer qu'au niveau n , les volumes d'eau reçus par unité de temps dans chacune des $n + 1$ vasques (numérotées de gauche à droite) sont $v_k = \binom{n}{k} \times \frac{V}{2^n}$.

76 Le tirage d'une boule dans l'urne est une épreuve de Bernoulli où les deux issues B et N sont telles que $P(B) = P(N) = \frac{1}{2}$. L'expérience est alors un schéma de Bernoulli d'ordre n .

On note A l'événement «Lors des n tirages on obtient les deux couleurs», donc \bar{A} signifie «Tirage unicolore».

\bar{A} est représenté par les chemins à n branches

$\rightarrow B \rightarrow B \dots \rightarrow B$ et $\rightarrow N \rightarrow N \dots \rightarrow N$.

Donc $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi : $p_n = P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

On résout l'inéquation $p_n > 0,999$:

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} > 1 - \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 1000.$$

La suite (2^{n-1}) est strictement croissante.

Or : $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$;

donc pour tout entier $n \geq 11$, $2^{n-1} \geq 2^{10} > 1000$.

Ainsi le plus petit entier solution est $n_0 = 11$.

À partir de 11 tirages, la probabilité d'obtenir des boules des deux couleurs dépasse 0,999.

77 L'expérience est un tirage sans remise de deux sujets parmi 20. Le nombre d'issues possibles est $20 \times 19 = 380$. Toutes les issues sont équiprobables.

Soit n le nombre de sujets connus ($0 \leq n \leq 20$).

On note A l'événement : «Le candidat sait traiter au moins l'un des deux sujets». Ainsi, \bar{A} signifie : «Le candidat ne sait traiter aucun des deux sujets» ;

$$P(\bar{A}) = \frac{(20-n)(19-n)}{380}.$$

D'où $P(A) = 1 - \frac{(20-n)(19-n)}{380}$ soit $P(A) = \frac{39n - n^2}{380}$.

Il s'agit de déterminer n tel que $P(A) > \frac{3}{4}$.

$$P(A) > \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-n^2 + 39n - 285}{380} > 0 \quad [1].$$

Le trinôme $-x^2 + 39x - 285$ admet dans \mathbb{R} deux racines $x_1 \approx 9,7$ et $x_2 \approx 29,3$; il est positif entre les racines.

x	0	x_1	20	x_2
$-x^2 + 39x - 285$		-	+	0

Ainsi, les entiers solutions de l'inéquation [1] sont tels que $10 \leq n \leq 20$.

Le candidat doit connaître au moins 10 sujets pour avoir plus de 75 % de chances de savoir traiter au moins l'un des deux sujets.

EXERCICES

Travail en autonomie (page 345)

A 1. Arbre pondéré : voir ci-contre.

• L'issue associée à $\rightarrow B \rightarrow B$ a pour probabilité $\frac{1}{36}$;

d'où $[P(B)]^2 = \frac{1}{36}$ donc $P(B) = \frac{1}{6}$.

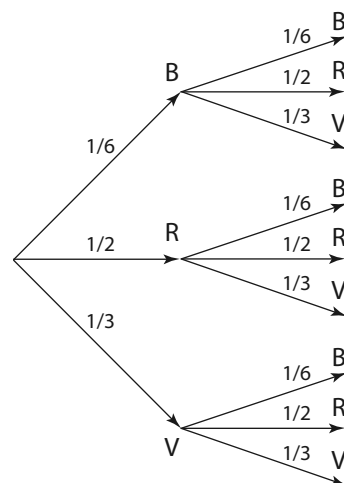
• Les chemins $\rightarrow B \rightarrow R$ et $\rightarrow R \rightarrow B$ définissent l'événement de probabilité $\frac{1}{6}$;

donc $2P(B) \times P(R) = \frac{1}{6}$.

Ainsi $P(R) = \frac{1}{12P(B)}$ soit $P(R) = \frac{1}{2}$.

• D'après la loi des nœuds :

$$P(V) = 1 - (P(B) + P(R)) \text{ donc } P(V) = \frac{1}{3}.$$



3. L'urne contient 18 boules et en raison de l'équiprobabilité de chacune des boules lors d'un tirage, la proportion de boules de chaque couleur est donnée par la probabilité correspondante.

L'urne contient 3 boules bleues, 9 rouges et 6 vertes.

B 1. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 4 où la probabilité de succès lors d'une épreuve est $p = 0,6$.

X est la variable aléatoire qui indique le nombre de paniers réussis. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.

- $P(A) = P(X = 4) = 0,6^4 = 0,1296$.
- $P(B) = P(X = 3) = 4 \times 0,6^3 \times 0,4 = 0,3456$.
- $P(C) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,4^4 = 0,9744$.

2. On est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre n où la probabilité de succès est $p = 0,6$.

On note A : « Lucy réussit au moins un panier lors des n tirs ». \bar{A} signifie : « Lucy ne réussit aucun tir ».

$P(\bar{A}) = 0,4^n$; d'où la probabilité $P_n = P(A) = 1 - 0,4^n$.

Il s'agit de déterminer n tel que $P_n > 0,9999$.

$P_n > 0,9999 \Leftrightarrow 1 - 0,4^n > 1 - 0,0001 \Leftrightarrow 0,4^n < 0,0001$.

La suite $(0,4^n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Or $0,4^{10} > 0,0001$ et $0,4^{11} < 0,0001$;

donc pour tout entier $n \geq 11$, $0,4^n \leq 0,4^{11} < 0,0001$.

Ainsi, le plus petit entier solution est $n_0 = 11$.

À partir de 11 lancers, la probabilité pour Lucy de réussir au moins un panier dépasse 0,9999.

C 1. La situation est résumée par le tableau de probabilités :

	C	M	
E	0,15	0,55	0,70
F	0,10	0,20	0,30
	0,25	0,75	1

a) $P(F \cap M) = 0,30 - 0,10 = 0,20$.

b) $P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F)$

$P(C \cup F) = 0,25 + 0,30 - 0,10 = 0,45$.

2. a) On reconnaît un schéma de Bernoulli d'ordre 10 où la probabilité de succès ($F \cap M$) lors d'une épreuve (interrogation d'une personne) est $p = 0,2$.

La variable aléatoire X indiquant le nombre de personnes qui, parmi les dix, préfèrent les films français et le cinéma multiplexe, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,2)$.

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,2^5 \times 0,8^5 \approx 0,26$.

b) De même, on reconnaît un schéma de Bernoulli d'ordre 10 où la probabilité de succès ($C \cup F$) lors d'une épreuve est $p' = 0,45$.

La variable aléatoire X' indiquant le nombre de personnes qui parmi les dix, préfèrent les films français ou le cinéma multiplexe, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,45)$.

$P(X' = 5) = \binom{10}{5} \times 0,45^5 \times 0,55^5 \approx 0,234$.

D 1. Le choix d'un tee-shirt est une épreuve de Bernoulli dont les deux issues sont S « Le tee-shirt est sans défaut » et \bar{S} , avec $p = P(S) = 0,8$.

La vente du lot est assimilée à un schéma de Bernoulli d'ordre 250.

X indique le nombre de réalisations de S , donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(250; 0,8)$.

Ainsi $E(X) = np$ soit $E(X) = 250 \times 0,8 = 200$.

2. a) Lors des soldes, le prix de vente d'un tee-shirt sans défaut est 21 € et celui d'un tee-shirt avec défaut 14 €.

X indique le nombre de tee-shirts sans défaut;

donc $250 - X$ donne le nombre de tee-shirts avec défaut.

Ainsi la variable aléatoire V vérifie :

$$V = 21X + 14(250 - X) - 150$$

$$V = 7X + 3350$$

b) $E(V) = 7E(X) + 3350$ soit $E(V) = 4750$.

Ainsi la gérante peut espérer un chiffre d'affaires de 4750 € sur la vente du lot de tee-shirts.

E 1. L'intervalle de fluctuation à 95% selon la loi binomiale $\mathcal{B}(872; 0,75)$ est $I = \left[\frac{a}{872}; \frac{b}{872} \right]$.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de vendeurs satisfaits sur un échantillon aléatoire de taille 872. Le nombre a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$. D'où : $a = 629$.

Le nombre b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$. D'où : $b = 679$.

Ainsi $I = \left[\frac{629}{872}; \frac{679}{872} \right]$.

2. $f_{obs} = \frac{618}{872}$ donc $f_{obs} \notin I$.

On rejette au seuil de 5% l'hypothèse que la proportion de vendeurs satisfaits est $p = 0,75$.

On peut penser que l'affirmation de la direction est un jugement trop optimiste.

