CHAPITRE 12 Probabilités : variable aléatoire

ACTIVITÉS (page 293)

Activité 1

1 Nombre de tirages possibles : $3^3 = 27$.
Il y a équiprobabilité.

1 a) Un cube peut avoir 0, 1, 2 ou 3 faces peintes.

b) $P(N = 3) = \frac{8}{27}$.

c) Tableau :

k	0	1	2	3
$P(N = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

Activité 2

1 D prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

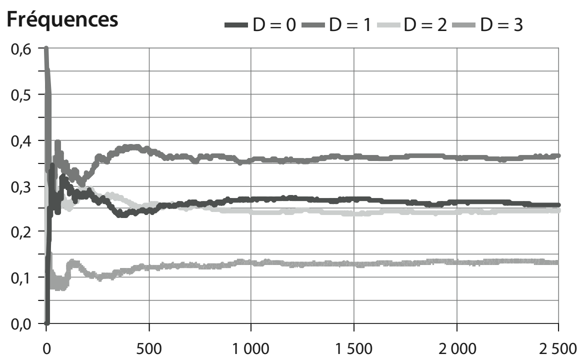
2 a) Saisir
– en A2 : $\boxed{1}$
– en B2 : =ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)
– en C2 : =ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)
– en D2 : =ABS(B2-C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N° du lancer	Dé 1	Dé 2	D=|d1-d2|	D=0	D=1	D=2	D=3
2	1	2	4	2	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000

b) Saisir :
– en E2 : =NB.SI(D$2:D2;0)/$A2
– en F2 : =NB.SI(D$2:D2;1)/$A2
– en G2 : =NB.SI(D$2:D2;2)/$A2
– en H2 : =NB.SI(D$2:D2;3)/$A2

c) Copier vers le bas la plage A2:H2 jusqu'à la ligne 2 501.

d) Représentation graphique des fréquences :



e) Estimations :
$P(D = 0) \approx 0,25$; $P(D = 1) \approx 0,37$; $P(D = 2) \approx 0,25$; $P(D = 3) \approx 0,13$.

3. Tableau des issues possibles :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$P(D = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $P(D = 1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$; $P(D = 2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;
$P(D = 3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.
La simulation est en accord avec ce modèle.

PROBLÈME OUVERT

On considère l'univers constitué des cinq couleurs, muni de la loi de probabilité ci-dessous :

Issue	**rouge**	**violet**	**jaune**	**bleu**	**vert**
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

X désigne le gain algébrique (en €) du forain compte tenu de la mise du joueur.
On note x la somme que rapporte au joueur la sortie de la couleur verte.

Loi de probabilité de X :

Valeur k	15	10	5	-6	$15-x$
P(X = k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

L'espérance de gain du forain est :
$E(X) = \frac{15}{3} + \frac{10}{6} + \frac{5}{6} - \frac{6}{4} + \frac{15-x}{12} = \frac{87-x}{12}$.
$E(X) > 0 \Leftrightarrow x < 87$.
La stratégie du forain consiste à proposer un montant compris entre 21 € et 87 € pour la sortie du vert.

EXERCICES Application (page 296)

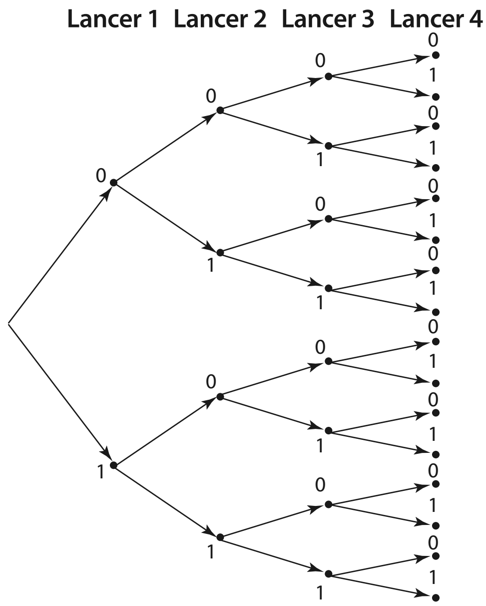
1 **1.** L'univers est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où x et y sont deux entiers tels que $1 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 6$.
Toutes les issues sont équiprobables.
Tableau des issues et des valeurs de S associées :

Dé 2 \ Dé 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

S prend les valeurs 2, 3, 4, …, 12.
Loi de S :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S = s_i)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

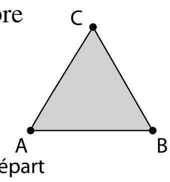
2 **1.** On code 1 la sortie de « Face » et 0 celle de « Pile ».
L'univers est l'ensemble des quadruplets formés de 0 et de 1. Toutes les issues sont équiprobables.
Un arbre illustre la situation (voir ci-contre).
N prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.
Le nombre de sorties de « Face » associé à une issue est le nombre de 1 dans l'écriture du quadruplet.

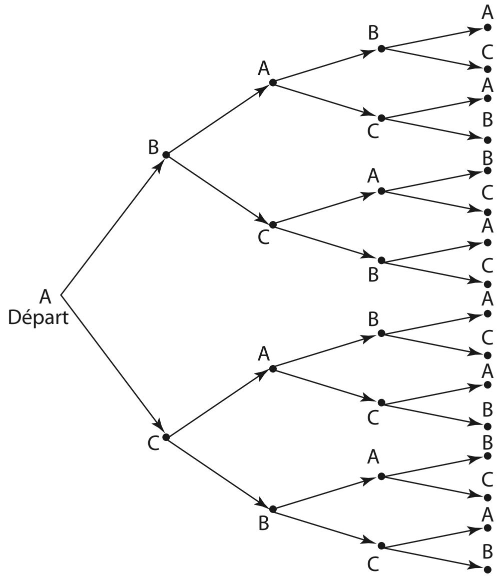


Loi de N :

n_i	0	1	2	3	4
P(N = n_i)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

3 **1.** L'expérience est illustrée par l'arbre ci-après où toutes les issues (chemins) sont équiprobables.





X prend les valeurs 0, 1, 2.
Loi de X :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$

4 **1.** Une issue est un couple de deux boules distinctes.
1[re] boule : 10 choix ; 2[e] boule : 9 choix.
L'univers contient 90 issues équiprobables.
G prend les valeurs –5, –2, –1, 4.
Loi de G :

g_i	-5	-2	-1	4
$P(G = g_i)$	$\frac{2 \times 1}{90} = \frac{1}{45}$	$\frac{3 \times 2}{90} = \frac{1}{15}$	$\frac{90 - (20 + 6 + 2)}{90} = \frac{31}{45}$	$\frac{5 \times 4}{90} = \frac{2}{9}$

2. $E(G) = -\frac{5}{45} - \frac{2}{15} - \frac{31}{45} + \frac{12}{9} = -\frac{2}{45}$; $E(G) \approx -0{,}04$ €.
$E(G) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.
$V(G) = \frac{25}{45} + \frac{4}{15} + \frac{31}{45} + \frac{32}{9} - \left(-\frac{2}{45}\right)^2 = \frac{10\,256}{2\,025}$;
d'où : $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} \approx 2{,}25$ €.

5 L'univers est l'ensemble des couples $(x ; y)$ où x et y sont deux entiers tels que $1 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 6$.
Toutes les issues sont équiprobables.
Tableau des issues et des valeurs de M associées :

Dé 1 / Dé 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

S prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Loi de M :

m_i	1	2	3	4	5	6
$P(M = m_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$E(M) = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$; $\sigma(M) \approx 1{,}40$.

6 **1.** Une issue est un quadruplet de chiffres dont le premier est 2.

2	• 10 choix	• 10 choix	• 10 choix

L'univers contient 1 000 issues équiprobables.
• X prend les valeurs 1, 2, 3, 4.
– L'événement « X = 4 » contient une seule issue.
– L'événement « X = 1 » contient les issues du type :

2	• 9 choix	• 9 choix	• 9 choix

Il y a donc 729 issues favorables à cet événement.
– L'événement « X = 2 » contient les issues du type :

2	* *1 choix*	• 9 choix	• 9 choix

2	• 9 choix	* *1 choix*	• 9 choix

2	• 9 choix	• 9 choix	* *1 choix*

Il y a donc 243 issues favorables à cet événement.
– L'événement « X = 3 » contient les issues du type :

2	* *1 choix*	* *1 choix*	• 9 choix

2	* *1 choix*	• 9 choix	* *1 choix*

2	• 9 choix	* *1 choix*	* *1 choix*

Il y a donc 27 issues favorables à cet événement.
• Loi de X :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

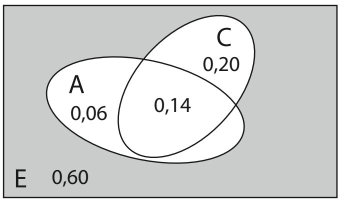
2. $E(X) = 1{,}3$; $\sigma(X) \approx 0{,}52$.

7 **1.** L'univers est l'ensemble des abonnés.
Il y a équiprobabilité. Loi de N :

k	4	5	6	7	8
$P(N = k)$	0,09	0,12	0,36	0,18	0,25

Remarque : P(N = 8) est le complément à 1 de la somme des autres probabilités.
$E(N) = 6{,}38$.
2. a) $S = 15N + 100$.
b) La dépense moyenne par abonné attendue est E(S).
$E(S) = 15E(N) + 100 = 195{,}70$ €.

8 **1.** L'univers E est l'ensemble des clients durant la semaine de promotion. Il y a équiprobabilité.
$P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C) = 0{,}40$;
d'où $P(\overline{A \cup C}) = 0{,}60$. D'où le schéma :



Loi de X :

x_i	0	4	30	34
$P(X = x_i)$	0,60	0,20	0,06	0,14

2. a) $B = 225X - 250$.
b) Le bénéfice moyen espéré est $E(B)$.
$E(B) = 225E(X) - 250$ avec $E(X) = 7{,}36$;
donc : $E(B) = 1\,406$ €.

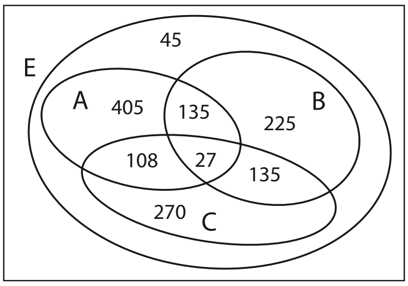
EXERCICES Activités de recherche (page 300)

13 **Sondage et variable aléatoire**

• ***Les outils :***
– Diagramme de Venn.
– Situation d'équiprobabilité.
– Formule de l'espérance.

• ***Les objectifs :***
– Dénombrer des ensembles non disjoints.
– Calculer la probabilité d'événements.
– Définir la loi d'une variable aléatoire.

1. Diagramme :



2. Nombre d'internautes qui ne se connectent ni à A, ni à B, ni à C : 45.
3. a) S prend les valeurs 0, 1, 2, 3.
b) Loi de S :

k	0	1	2	3
$P(S = k)$	$\frac{45}{1\,350} = \frac{1}{30}$	$\frac{900}{1\,350} = \frac{2}{3}$	$\frac{378}{1\,350} = \frac{7}{25}$	$\frac{27}{1\,350} = \frac{1}{50}$

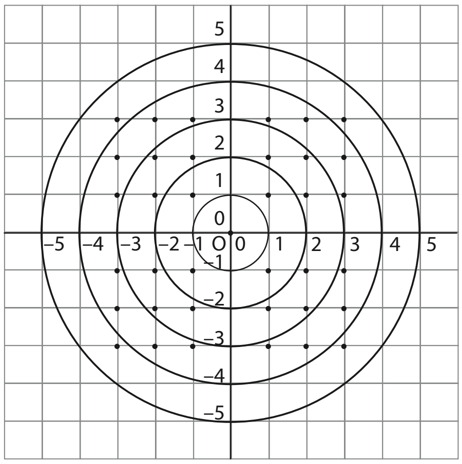
c) $E(S) = \frac{193}{150} \approx 1{,}287$.

14 **Variable aléatoire et géométrie**

• ***Les outils :***
– Repérage dans un repère orthonormé.
– Condition d'appartenance à un disque.
– Situation d'équiprobabilité.

• ***Les objectifs :***
– Calculer analytiquement une distance.
– Utiliser une variable aléatoire.
– Calculer la probabilité d'événements.

1. a) Une issue est un couple $(x ; y)$ où x et y appartiennent à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3\}$.
Nombre d'issues possibles : $6^2 = 36$.
Toutes ces issues sont équiprobables.
b) Schéma :



c) Le point $M(3 ; 1)$ est tel que $OM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
Ainsi $OM > 3$ donc M est extérieur au disque D_3.
2. a) $X = x^2 + y^2$.
b) Tableau des différentes issues et des valeurs associées de X :

y \ x	–3	–2	–1	1	2	3
3	18	13	10	10	13	18
2	13	8	5	5	8	13
1	10	5	2	2	5	10
–1	10	5	2	2	5	10
–2	13	8	5	5	8	13
–3	18	13	10	10	13	18

X prend les valeurs 2, 5, 8, 10, 13, 18.
c) Loi de X :

k	2	5	8	10	13	18
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$M(x\,;y) \in D_r \Leftrightarrow X \leqslant r^2$.
D'où les probabilités :
$P(M \in D_1) = 0$; $P(M \in D_2) = \dfrac{1}{9}$; $P(M \in D_3) = \dfrac{4}{9}$;
$P(M \in D_4) = \dfrac{8}{9}$; $P(M \in D_5) = 1$.

15 Recherche d'un jeu équitable

• ***Les outils :***
– Modèle de tirage sans remise.
– Dénombrement par la technique des cases.
– Notion de jeu équitable.

• ***Les objectifs :***
– Définir une variable aléatoire.
– Exploiter l'expression de l'espérance mathématique.
– Résoudre une équation du second degré.

1. a) Une issue est un couple de deux boules distinctes.

1re boule	2e boule
$n + 6$ choix	$n + 5$ choix

L'univers contient $(n + 6)(n + 5)$ issues équiprobables.
b) G prend les valeurs -6, -1, 4.
c) L'événement « $G = -1$ » correspond au tirage d'une boule blanche et d'une boule rouge. Une issue favorable est :
– soit du type

B	R
6 choix	n choix

– soit du type

R	B
n choix	6 choix

Le nombre d'issues favorables est $2 \times (6n) = 12n$, d'où :
$P(G = -1) = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$.
d) Loi de G :

k	-6	-1	4
P(G = k)	$\dfrac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)}$	$\dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$	$\dfrac{30}{(n+6)(n+5)}$

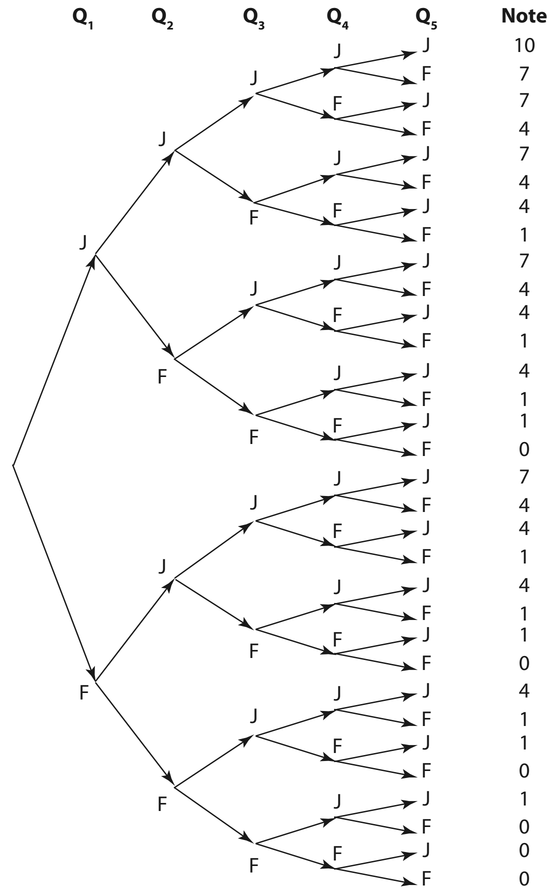
2. a) $E(G) = \dfrac{-6n(n-1) - 12n + 120}{(n+6)(n+5)} = \dfrac{-6n^2 - 6n + 120}{(n+6)(n+5)}$.
b) $E(G) = 0$ équivaut à $-n^2 - n + 20 = 0$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation sont 4 et -5.
Or n est un entier tel que $n \geqslant 2$; donc $n = 4$.
Pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que l'urne soit composée de 6 boules blanches et de 4 boules rouges.

16 Narration de recherche

Une issue est un quintuplet formé à partir de lettres prises parmi J (juste) et F (faux).
Toutes les issues sont équiprobables.
Un arbre illustre la situation (voir ci-après).
N est la variable aléatoire qui indique la note obtenue.
Loi de N :

k	0	1	4	7	10
P(N = k)	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{5}{32}$	$\dfrac{1}{32}$

$E(N) = \dfrac{95}{32} \approx 3$.



La note moyenne espérée sur un grand nombre de tests est d'environ 3 alors qu'il faut viser au-dessus de 5 pour être admis.
La stratégie de la réponse au hasard n'est pas payante…
Remarque : ce problème peut aussi être abordé au chapitre 13, avec l'utilisation de la loi binomiale qui permet d'éviter la représentation de toutes les issues par un arbre.

17 Narration de recherche

L'univers de l'expérience est constitué des 100 couples $(d\,;u)$ où d et u sont deux chiffres pris parmi 0, 1, …, 9.
Toutes les issues sont équiprobables.
T associe à l'issue $(d\,;u)$ le nombre $10d + u$ c'est-à-dire le nombre de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est d et celui des unités u.
Ainsi, T prend les valeurs entières de 0 à 99.
Tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 99$ est associé à une seule issue, donc $P(T = k) = \dfrac{1}{100}$.
La loi de T est équirépartie sur l'ensemble des entiers naturels de 0 à 99.
• Méthode de simulation
On lance deux fois le dé proposé. La valeur de T obtenue est un entier « au hasard » entre 0 et 99.
Remarque : si l'on répète l'expérience plusieurs fois, on obtient une liste de résultats de deux chiffres, par exemple : |53|12|33|19|05|…
Il suffit de couper cette liste par tranche de deux chiffres pour obtenir une liste au hasard d'entiers pris entre 0 (assimilé à 00) et 99.

18 TP – Afficher les indicateurs d'une variable aléatoire

Voir page 302.

19 **TP – Établir le lien entre espérance mathématique et moyenne**

1. a) Saisir :

– en A2 : $\boxed{1}$

– en B2 : $\boxed{\text{=ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)}}$

Copier vers la droite jusqu'en D2.

b) Saisir en E2 : $\boxed{\text{=NB.SI(B2:D2;4)}}$

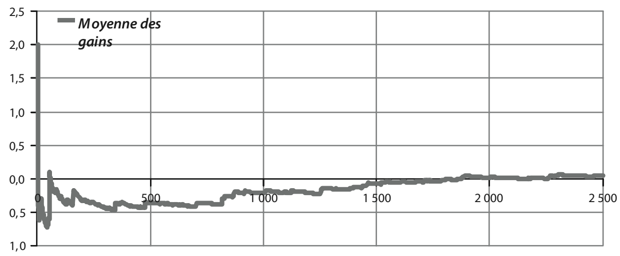
c) Saisir en F2 : $\boxed{\text{=SI(E2=3;36;SI(E2=2;2;–1))}}$

Cette instruction conditionnelle indique que :
si le 4 est sorti 3 fois, on affiche le gain 36, sinon
si le 4 est sorti 2 fois on affiche le gain 2, sinon on affiche le gain –1.
C'est la règle du jeu !

d) Saisir en H2 : $\boxed{\text{=MOYENNE(F\$2:F2)}}$

e) Copier vers le bas la plage A2:H2 jusqu'à la ligne 2 501.

f) Représentation graphique



2. Lorsque le nombre de lancers augmente, la moyenne des gains tend à se stabiliser autour de la valeur 0.
Ainsi, au bout de 2 500 lancers, on peut espérer un gain moyen nul.

3. a) Nombre d'issues possibles : $4^3 = 64$.
Toutes ces issues sont équiprobables.

b) Dénombrement :
– sortie de trois numéros 4 : 1 seule issue.
– sortie de deux numéros 4 : 9 issues.

c) Loi de probabilité de G :

g_i	-1	2	36
$P(G = g_i)$	$\frac{54}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

E(G) = 0 (en €).

d) L'espérance mathématique de G correspond au gain moyen que l'on peut espérer sur un grand nombre de lancers. Il y a accord entre le résultat de la simulation et le calcul de l'espérance.

EXERCICES Entraînement (page 304)

DE TÊTE

20

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{1}{2}$, $V(X) = \frac{1}{4}$.

21 **1.** Loi de G :

g_i	-2	10
$P(G = g_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. E(G) = 0 donc ce jeu est équitable.

22 **1.** $P(X = 3) = \frac{1}{4}$.

2. $E(X) = 2$; $V(X) = 1$.

23 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}34 - 0{,}25} = 0{,}3$.

24 $[E(X)]^2$ = moyenne des carrés – V(X)

$[E(X)]^2 = 3\,649 - 49 = 3\,600$ donc $E(X) = 60$.

25 Loi de X :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X) = 0$; $V(X) = 2$.

26 Loi de G :

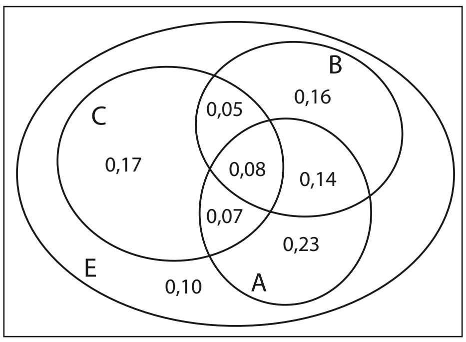
g_i	$-b$	a
$P(X = g_i)$	$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$E(G) = \frac{a - 3b}{4}$.

$E(G) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$.

PROBABILITÉS D'ÉVÉNEMENTS

27 **1.** Diagramme :



2. L'univers est l'ensemble E des élèves de Première du lycée. Il y a équiprobabilité.

a) On note U l'événement : « Il a lu une seule revue ».
$P(U) = 0{,}23 + 0{,}16 + 0{,}17 = 0{,}56$.

b) On note Z l'événement : « Il n'a lu aucune revue ».
$P(Z) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$.

28 **a)** L'univers est l'ensemble E des élèves de la classe. Il y a équiprobabilité.
L'événement $\overline{T \cup C}$ s'énonce « L'élève n'appartient ni au club théâtre ni à la chorale » ; il contient 18 élèves.
Ainsi $T \cup C$ contient 17 élèves donc $P(T \cup C) = \frac{17}{35}$.
b) $P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$ donc
$P(T \cap C) = P(T) + P(C) - P(T \cup C)$
$P(T \cap C) = \frac{10}{35} + \frac{12}{35} - \frac{17}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

29 *Corrigé dans le manuel.*

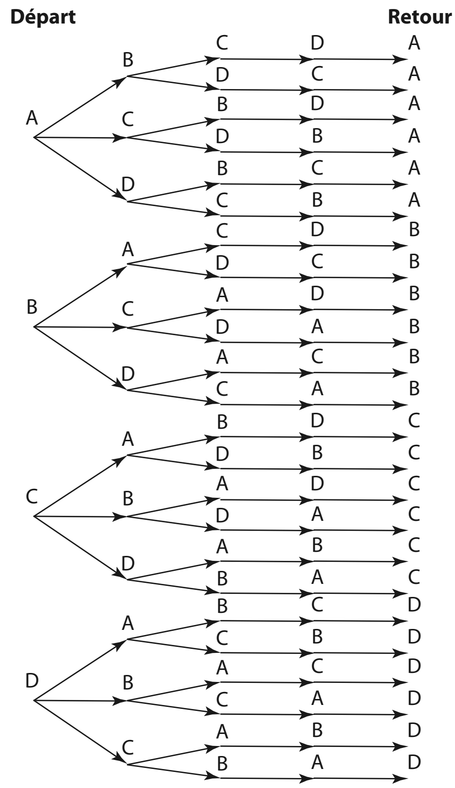
30 **1.** L'univers contient $6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles. Tous les tirages sont équiprobables.
• $P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$.
• Une issue favorable à B est du type :
$\boxed{B}\boxed{N}\boxed{N}$ ou $\boxed{N}\boxed{B}\boxed{N}$ ou $\boxed{N}\boxed{N}\boxed{B}$.
Il y a 2 choix pour la boule blanche, 4 choix pour la première boule noire et 3 choix pour la deuxième.
$P(B) = \frac{3 \times (2 \times 4 \times 3)}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{5}$.
• Une issue favorable à C est du type :
$\boxed{B}\boxed{B}\boxed{N}$ ou $\boxed{B}\boxed{N}\boxed{B}$ ou $\boxed{N}\boxed{B}\boxed{B}$.
Il y a 2 choix pour la première boule blanche et 1 choix pour la deuxième, enfin 4 choix pour la boule noire.
$P(C) = \frac{3 \times (2 \times 1 \times 4)}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$.
2. a) Dans le cas d'un tirage avec remise, l'univers contient $6^3 = 216$ issues possibles toutes équiprobables.
$P(A) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$; $P(B) = \frac{3 \times (2 \times 4^2)}{6^3} = \frac{4}{9}$;
$P(C) = \frac{3 \times (2^2 \times 4)}{6^3} = \frac{2}{9}$.
b) $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{26}{27}$.
Cette somme est différente de 1.
Lors d'un tirage avec remise, il peut aussi se produire l'éventualité D : « Le tirage contient trois boules blanches » avec $P(D) = \frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$.
Alors, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$.

31 **1.** Une issue est un couple de faces des deux cubes. L'univers peut être représenté par un tableau à double entrée. Les différentes sommes sont indiquées dans les cases associées à chacune des issues.

Dé R \ Dé B	1	1	1	1	6	6
1	2	2	2	2	7	7
1	2	2	2	2	7	7
4	5	5	5	5	10	10
4	5	5	5	5	10	10
4	5	5	5	5	10	10
6	7	7	7	7	12	12

a) $P(S = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$. **b)** $P(S = 7) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
2. Les sommes possibles ne sont pas équiprobables.
Contre-exemple : $P(S = 5) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

32 **1.** Toutes les issues représentées par l'arbre sont équiprobables.



2. $P(T) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$; $P(U) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$; $P(V) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

33 **1.** Nombre d'anagrammes possibles :
$N = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
2. Tous les anagrammes sont équiprobables.
• $P(S) = \frac{1}{120}$.
• $P(V) = \frac{3 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{5}$;
• $P(C) = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{5}$.
Remarque : les résultats pour les événements V et C sont conformes à l'intuition !
• $P(T) = P(V \cup C) = P(V) + P(C) - P(V \cap C)$.
Or $V \cap C$ signifie « L'anagramme commence par une voyelle et se termine par une consonne » ;
donc $P(V \cap C) = \frac{3 \times (3 \times 2 \times 1) \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{10}$.
Ainsi : $P(T) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

34 **1.** Nombre d'issues possibles : $N = 5 \times 4 = 20$.
Toutes ces issues sont équiprobables.
2. a) $P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. **b)** $P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
c) $P(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$.

3. a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{5}$.

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{5}$.

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$ signifie « $a + b \neq 5$ et $|a - b| \neq 1$ » ;

d'où : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Remarque : on peut aussi utiliser $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

d'où $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$;

d'où : $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$.

Remarque : on peut aussi utiliser $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$;

d'où $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{10}$.

35 *Corrigé dans le manuel.*

36 **1.** Tableau des modes de paiement :

Mode de paiement	Montant M		
	M ⩽ 200	M > 200	Total
Espèces	14 %	4 %	18 %
Chèque	54 %	26 %	80 %
Carte de paiement	2 %	0 %	2 %
Total	70 %	30 %	100 %

2. L'univers est l'ensemble des fiches des clients.
Toutes ces fiches sont équiprobables.
$P(A) = 0{,}30$; $P(B) = 0{,}04$; $P(C) = 0{,}44$.

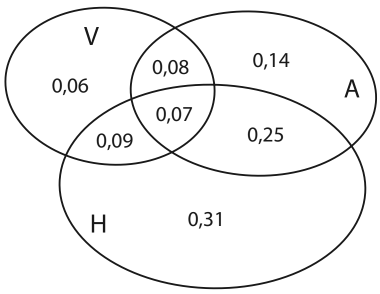
3. a) L'univers est constitué des fiches des clients qui règlent en espèces. Toutes ces fiches sont équiprobables.

$P'(M > 200) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

b) L'univers est constitué des fiches des clients dont le montant des achats ne dépasse pas 200 €.
Toutes ces fiches sont équiprobables.

P'' (chèque) $= \frac{54}{70} = \frac{27}{35}$.

37 **1.** Diagramme :



2. L'univers est l'ensemble des assurés.
Il y a équiprobabilité.

a) $P(A \cap V \cap H) = 0{,}07$;
$P(A \cap V) = 0{,}07 + 0{,}08 = 0{,}15$;
$P(A \cup H) = 0{,}31 + 0{,}25 + 0{,}07 + 0{,}09 + 0{,}14 + 0{,}08 = 0{,}94$.

b) $P(\overline{H} \cap A) = 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}22$;
$P(\overline{H} \cap \overline{V}) = 0{,}14$.

c) $P(\overline{A \cup H}) = 1 - P(A \cup H) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$;
$P(\overline{A \cup V}) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$.

3. $E = \overline{V} \cap A \cap H$ d'où $P(E) = 0{,}25$.
$F = A \cap \overline{H} \cap \overline{V}$ d'où $P(F) = 0{,}14$.
$G = A \cap V \cap \overline{H}$ d'où $P(G) = 0{,}08$.

38 **1. a)** Par négation : $e \notin A \cap B \Leftrightarrow e \notin A$ ou $e \notin B$.

b) Ainsi : $e \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow e \in \overline{A}$ ou $e \in \overline{B}$
soit $e \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow e \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
On conclut que : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. De même : $e \in A \cup B \Leftrightarrow e \in A$ ou $e \in B$;
d'où, par négation : $e \notin A \cup B \Leftrightarrow e \notin A$ et $e \notin B$.
Ainsi : $e \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow e \in \overline{A}$ et $e \in \overline{B}$
soit $e \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow e \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
On conclut que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

39 **1.** Le tirage est sans remise donc le nombre d'issues est $4 \times 3 = 12$.
Toutes ces issues sont équiprobables.

2. Cet événement noté « N = 0 » contient 2 issues.

3. Cet événement noté « N = 2 » contient 2 issues.

4. a) Loi de N :

k	0	1	2
P(N = *k*)	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) $E(N) = 1$.

40 **1.** Le tirage se fait avec remise donc le nombre d'issues est $4^2 = 16$. Toutes ces issues sont équiprobables.

2. Cet événement noté « N = 0 » contient 4 issues.

3. Cet événement noté « N = 2 » contient 4 issues.

4. a) Loi de N :

k	0	1	2
P(N = *k*)	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

b) $E(N) = 1$.

41 **1.** L'univers est $E = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$.
Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de C :

k	0	1	4
P(C = *k*)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

2. $E(C) = 2$; $V(C) = \frac{14}{5} = 2{,}8$.

42 L'univers est l'ensemble des 2 000 billets ; il y a équiprobabilité.

1. a) G prend les valeurs -2, 98, 148, 1 498.

b) $P(G = -2) = \frac{2\,000 - (1 + 2 + 5)}{2\,000} = 0{,}996$.

2. Loi de probabilité de G :

g_i	-2	98	148	1498
P(G = g_i)	0,996	0,0025	0,001	0,0005

3. E(G) = −0,85 (en €).
Le jeu est défavorable à l'acheteur de billet.

43 *Corrigé dans le manuel.*

44 **1.** L'univers est l'ensemble de la production de tiges filetées. Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de D :

***d* en mm**	15,8	16	16,1	16,3
P(D = *d*)	$\frac{38}{140}=\frac{19}{70}$	$\frac{41}{140}$	$\frac{45}{140}=\frac{9}{28}$	$\frac{16}{140}=\frac{4}{35}$

2. Loi de L :

ℓ en mm	84	85	86	87
P(L = ℓ)	$\frac{20}{140}=\frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{24}{140}=\frac{6}{35}$

3. $P(U)=\frac{30}{140}=\frac{3}{14}$ et $P(R)=\frac{5}{140}=\frac{1}{28}$.

45 **1.** L'univers contient $2^6 = 64$ codes équiprobables.
Loi de N :

k	0	1	2	3	4	5	6
P(N = *k*)	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

2. E(N) = 3 ; $V(X)=\frac{21}{2}-9=\frac{3}{2}$.

46 *Corrigé dans le manuel.*

47 **1.** Tableau de probabilités :

	S	**$\overline{S}$**	
B	0,56	0,14	0,7
$\overline{B}$	0,015	0,285	0,3
	0,575	0,425	1

2. $\overline{B} \cap S$ signifie « Il n'y a pas, sur zone, de banc de poissons mais le sonar en a détecté un » ; $P(\overline{B} \cap S) = 0{,}015$.
3. a) Loi de probabilité de X :

x_i	−150	−400	2000
P(X = x_i)	0,425	0,015	0,56

b) Le gain moyen par sortie correspond à E(X) = 1050,25 €.

UTILISATION DES PARAMÈTRES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

48 **1.** Loi de X :

k	80	50	0	$-10a$
P(X = *k*)	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Remarque : le jeton est donné par l'exploitant donc il ne coûte rien au joueur.
2. a) E(X) = 12 − 6*a*.
E(X) = 0 ⇔ *a* = 2.
Ainsi le jeu est équitable lorsque la valeur du jeton est 2 €.
b) L'exploitant a intérêt à fixer *a* > 2 ; ainsi E(X) < 0 et le jeu lui sera favorable.

49 **1.** Tableau de répartition :

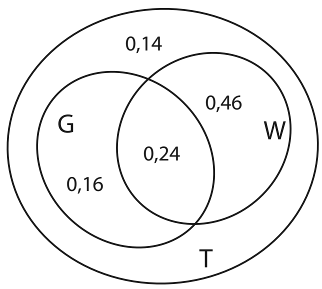
	L	**A**	**C**	
R	10 %	5 %	25 %	40 %
$\overline{R}$	20 %	15 %	25 %	60 %
	30 %	20 %	50 %	100 %

2. a) S prend les valeurs 60, 60 + *x*, 100, 100 + *x*.
b) Loi de S :

k	60	60 + *x*	100	100 + *x*
P(S = *k*)	0,35	0,15	0,25	0,25

c) E(S) = 0,40*x* + 80 (en €).
d) La condition s'écrit E(S) < 90 soit 0,40*x* + 80 < 90.
D'où *x* < 25.
Ainsi, le directeur doit fixer à moins de 25 € le montant de la participation à la journée.

50 **1. a)** Schéma de la situation :



P(G ∪ W) = P(G) + P(W) − P(G ∩ W)
P(G ∪ W) = 0,4 + 0,7 − 0,24 = 0,86.
b) « Le téléphone n'a aucune des deux options » est l'événement $\overline{G \cup W}$ et $P(\overline{G \cup W}) = 0{,}14$.
2. Loi de X :

x_i	0	6	12	18
P(X = x_i)	0,14	0,46	0,16	0,24

b) E(X) = 9 (en €).
c) On note Y la variable aléatoire qui donne le coût total d'équipement.
Y = 200000 X,
d'où E(Y) = 200000 E(X) = 1800000 (en €).
Ainsi, en moyenne, le coût de revient total peut être estimé à 1,8 million d'euros.

51 **1. a)** Lois de probabilité :
• Stratégie 1 :

k	−10	10
P(G_1 = *k*)	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

• Stratégie 2 :

k	-10	350
$P(G_2 = k)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

• Stratégie 3 :

k	-10	20
$P(G_3 = k)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

b) $E(G_1) = E(G_2) = E(G_3) = -\frac{10}{37}$ (en €).
$V(G_1) \approx 100$; $V(G_2) \approx 3\,408$; $V(G_3) \approx 197$.
2. Les trois stratégies conduisent à la même espérance de gain qui indique un jeu défavorable au joueur.
Les variances sont sensiblement différentes. En particulier, dans la stratégie 2, la forte variance traduit la possibilité de gagner gros par rapport aux deux autres façons de jouer.

52 *Corrigé dans le manuel.*

53 **1.** Tableau de probabilités :

	S_p	S_n	S_r	
R	0,20	0,10	0,08	0,38
$\overline{R}$	0,28	0,14	0,20	0,62
	0,48	0,24	0,28	1

$P(R \cap S_p) = 0{,}20$; $P(R \cap S_n) = 0{,}10$; $P(R \cap S_r) = 0{,}08$.
2. a) Loi de X :

k	22	26	15	0
$P(X = k)$	0,20	0,10	0,08	0,62

b) On note Y la variable aléatoire qui donne le gain (en €) sur la location d'une paire de skis ou d'un snowboard.
$Y = 30 - X$, d'où : $E(Y) = 30 - E(X)$.
Or $E(X) = 8{,}2$ donc $E(Y) = 21{,}8$ (en €).
Le magasin peut espérer, en moyenne, gagner 21,8 € sur la location d'une paire de skis ou d'un snowboard.

54 **1.** Tableau de répartition :

	R_2	$\overline{R_2}$	
R_3	4	21	25
$\overline{R_3}$	8	967	975
	12	988	1 000

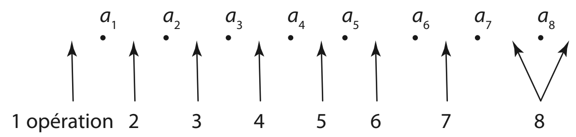
Nombre d'ordinateurs de :
$R_2 \cap R_3$: 4 ; $R_2 \cap \overline{R_3}$: 8 ; $\overline{R_2} \cap R_3$: 21 ; $\overline{R_2} \cap \overline{R_3}$: 967.
2. a) Loi de X :

k	0	150	200	350
$P(X = k)$	0,967	0,008	0,021	0,004

b) $E(X) = 6{,}8$ (en €).
c) Le tarif proposé (30 €) est cher par rapport au coût moyen de réparation (6,8 €). C'est une bonne affaire pour le fabricant, mais sûrement pas pour l'acheteur.

55 **1.** L'univers est l'ensemble des 9 places possibles pour x.
Ces issues sont équiprobables.

Rangement de la fiche *x*



Loi de X :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(X) = \frac{44}{9} \approx 4{,}9$.
2. a) Étude des différents cas
• 1 opération :
on ouvre $[a_4a_5]$; on range x entre a_4 et a_5.
• 2 opérations :
on ouvre ensuite $[a_2a_3]$ ou $[a_6a_7]$; on range x soit entre a_2 et a_3, soit entre a_6 et a_7.
• 3 opérations :
on ouvre enfin $[a_1a_2]$ ou $[a_3a_4]$ ou $[a_5a_6]$ ou $[a_7a_8]$; on range x soit avant a_1, soit entre a_1 et a_2, soit entre a_3 et a_4, soit entre a_5 et a_6, soit entre a_7 et a_8, soit après a_8.
Ainsi, Y prend bien les valeurs 1, 2 et 3.
b) Loi de Y :

k	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

$E(Y) = \frac{23}{9} \approx 2{,}6$.
3. $E(Y) < E(X)$ donc la méthode B demande en moyenne moins de manipulations. Cela était prévisible !

56 **1.** Algorithme

```
Variables
x, y, N, Z
Algorithme
x ← 0:y ← 0:N ← 0
Tant que x² + y² ≤ 25 faire
   N ← N+1
   Z ← nombre entier au hasard entre 0 et 3
   Si Z = 0 alors x ← x+1
   Finsi
   Si Z = 1 alors x ← x-1
   Finsi
   Si Z = 2 alors y ← y+1
   Finsi
   Si Z = 3 alors y ← y-1
   Finsi
FinTant
Afficher N
```

2. Calculatrice, voir page suivante.
Exemple de résultats sur un échantillon de taille 1000

Événement	« $N \leqslant 15$ »	« $15 < N \leqslant 30$ »	« $N > 30$ »
f_{exp}	0,279	0,399	0,322

CASIO

```
======C12EX056==
0→X:0→Y:0→N↵
While X²+Y²≤25↵
N+1→N↵
Int (4×Ran# )→Z↵
If Z=0↵
Then X+1→X↵
IfEnd↵
If Z=1↵
Then X-1→X↵
IfEnd↵
If Z=2↵
Then Y+1→Y↵
IfEnd↵
If Z=3↵
Then Y-1→Y↵
IfEnd↵
WhileEnd↵
"N=":N
```

TI

```
PROGRAM:C12EX056
:0→X:0→Y:0→N
:While X²+Y²≤25
:N+1→N
:entAléat(0,3)→Z
:If Z=0
:Then
:X+1→X
:End
:If Z=1
:Then
:X-1→X
:End
:If Z=2
:Then
:Y+1→Y
:End
:If Z=3
:Then
:Y-1→Y
:End
:End
:Disp "N=":N
```

3. Intervalles de confiance au seuil de 95 % à partir des résultats de cet échantillon :

$P(N \leqslant 15) \to I = [0{,}247 ; 0{,}311]$;

$P(15 < N \leqslant 30) \to J = [0{,}367 ; 0{,}431]$;

$P(N > 30) \to K = [0{,}290 ; 0{,}354]$.

Pour diminuer l'amplitude de ces intervalles, il est nécessaire de prendre des échantillons de taille plus importante.

On peut cependant conjecturer que l'événement le plus probable est « $15 < N \leqslant 30$ » avec une probabilité voisine de 0,4.

ROC Restitution organisée de connaissances

57 **A.** • $E(Y) = p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ky_k$

$E(Y) = p_1(6 - x_1) + p_2(6 - x_2) + \ldots + p_k(6 - x_k)$

$E(Y) = 6p_1 - p_1x_1 + 6p_2 - p_2x_2 + \ldots + 6p_k - p_kx_k$

$E(Y) = 6(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k)$.

Or : $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ et $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = E(X)$;

donc : $E(Y) = 6 - E(X)$.

• $V(Y) = p_1y_1^2 + p_2y_2^2 + \ldots + p_ky_k^2 - [E(Y)]^2$

$V(Y) = p_1(6-x_1)^2 + p_2(6-x_2)^2 + \ldots + p_k(6-x_k)^2 - [6 - E(X)]^2$

$V(Y) = p_1(36 - 12x_1 + x_1^2) + p_2(36 - 12x_2 + x_2^2) + \ldots + p_k(36 - 12x_k + x_k^2) - [36 - 12E(X) + [E(X)]^2]$

$V(Y) = 36p_1 - 12p_1x_1 + p_1x_1^2 + 36p_2 - 12p_2x_2 + p_2x_2^2 + \ldots + 36p_k - 12p_kx_k + p_kx_k^2 - 36 + 12E(X) - [E(X)]^2$

$V(Y) = 36(p_1 + p_2 + \ldots + p_k - 1) - 12[p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k - E(X)] + p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_kx_k^2 - [E(X)]^2$

Or : $p_1 + p_2 + \ldots + p_k - 1 = 0$

et $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k - E(X) = 0$;

donc : $V(Y) = V(X)$.

B. 1. a) Loi de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

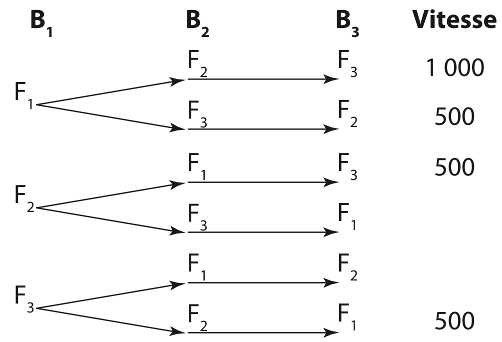
b) $E(X) = 2$; $V(X) = \frac{126}{27} - 4 = \frac{2}{3}$.

2. a) $Y = 6 - X$.

b) D'après **A.**, $E(Y) = 6 - E(X) = 4$ et $V(Y) = V(X) = \frac{2}{3}$.

Prendre toutes les initiatives

58 Un arbre illustre la situation :



Il existe 6 branchements possibles, tous équiprobables.

Loi de la vitesse V :

v_i (en tours × min^{-1})	0	500	1 000
$P(V = v_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

59 • **Stratégie 1 :** tirage avec remise.

L'univers est constitué de $10^2 = 100$ tirages possibles.

On note A : « Au moins une boule blanche » ;

ainsi $\overline{A}$ signifie « Aucune boule blanche ».

$P(\overline{A}) = \frac{5^2}{10^2} = 0{,}25$ d'où $P(A) = 0{,}75$.

• **Stratégie 2 :** tirage sans remise.

L'univers est constitué de $10 \times 9 = 90$ tirages possibles.

Avec les mêmes notations :

$P(\overline{A}) = \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9}$ d'où $P(A) = \frac{7}{9} \approx 0{,}78$.

La meilleure stratégie est celle du tirage sans remise.

60 Tableau de la situation :

Aire	rouge 25π	bleue 75π	verte 125π	cible 225π
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	1

$\times \frac{1}{225\pi}$

On note X la variable aléatoire qui à chaque zone associe le nombre de points marqués.

Loi de X :

t	100	40	10
$P(X = t)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

$E(X) = 30$.

Ainsi le joueur peut espérer obtenir en moyenne 30 points lors d'une séance d'entrainement.

61 L'univers est constitué des couples d'entiers $(x ; y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 6$.

Toutes ces issues sont équiprobables.

On note et G_1 et G_2 les variables aléatoires qui donnent le gain algébrique (en €) du joueur pour chacun des jeux.

• Jeu 1 : loi de G_1

k	-10	8
$P(G_1 = k)$	$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$	$\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

$E(G_1) = 0$; $V(G_1) = 80$.

• Jeu 2 : loi de G_2

k	-10	350
$P(G_2 = k)$	$\frac{35}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(G_2) = 0$; $V(G_2) = 3\,500$.
Les jeux sont équitables et le jeu 2 entraîne une plus grande dispersion des gains. Il vaut donc mieux choisir le jeu 2 qui offre la possibilité du plus gros gain.

EXERCICES Approfondissement (page 312)

62 **1.** Une issue est une liste indiquant l'apparition des 7 chevaux, du type :

Rang	1	2	3	4	5	6	7
	7 choix	6 choix	5 choix	4 choix	3 choix	2 choix	1 choix

Toutes les issues sont équiprobables.
X prend les valeurs 1, 2 ,3 ,4 ,5.

$$P(X = 1) = \frac{\boxed{3} \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{7};$$

$$P(X = 2) = \frac{4 \times \boxed{3} \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{7};$$

$$P(X = 3) = \frac{(4 \times 3) \times \boxed{3} \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6}{35};$$

$$P(X = 4) = \frac{(4 \times 3 \times 2) \times \boxed{3} \times (3 \times 2 \times 1)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{35};$$

$$P(X = 5) = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times \boxed{3} \times (2 \times 1)}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{35};$$

Loi de X :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

2. Le rang moyen d'apparition du premier cheval blanc est $E(X) = 2$.

63 **1.** L'univers est constitué des $(n + 8)^2$ couples de boules. Toutes ces issues sont équiprobables.
Loi de G :

k	-20	-5	10
$P(G = k)$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

2. a) $E(G) = \dfrac{-20n^2 - 80n + 640}{(n+8)^2}$.
b) Dire que le jeu est équitable signifie que $E(G) = 0$.
$E(G) = 0 \Leftrightarrow -20n^2 - 80n + 640 = 0$
$E(G) = 0 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du 2nd degré sont -8 et 4.
Or n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, donc la solution du problème est $n = 4$.

64 **1.** L'univers est l'ensemble des quadruplets $(x ; y ; z ; t)$ de numéros pris parmi 1, 2, 3, 4.

Tireur	A	B	C	D
Cible	x	y	z	t
	4 choix	4 choix	4 choix	4 choix

Il y a $4^4 = 256$ issues possibles, toutes équiprobables.
« $X = 2$ » signifie « 2 cibles intactes » soit aussi « exactement 2 cibles touchées ».
Une issue favorable est définie par :
– le choix des deux cibles touchées (6 choix possibles : 12–13–14–23–24–34) ;
– le nombre de façons de les toucher (14 possibilités).
En effet, il y a $2^4 = 16$ possibilités de tir sur deux cibles par quatre tireurs dont 2 où une seule cible est touchée.
Finalement, il existe $6 \times 14 = 84$ issues favorables.
D'où $P(X = 2) = \dfrac{84}{256} = \dfrac{21}{64}$.
2. a) X prend les valeurs 0, 1, 2, 3.
– « $X = 0$ » signifie « Toutes les cibles sont touchées ». Ainsi :
$P(X = 0) = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4^4} = \dfrac{3}{32}$.
– « $X = 3$ » signifie « Une seule cible est touchée ». Ainsi :
$P(X = 3) = \dfrac{4}{4^4} = \dfrac{1}{64}$.
– On a vu en **1.** que : $P(X = 2) = \dfrac{21}{64}$.
– Par complément à 1, on obtient :
$P(X = 1) = 1 - \left(\dfrac{3}{32} + \dfrac{21}{64} + \dfrac{1}{64}\right) = \dfrac{9}{16}$.
D'où la loi de X :

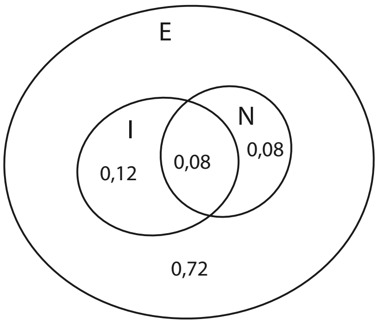
k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{1}{64}$

b) $E(X) = \dfrac{81}{64} \approx 1{,}26$.

En moyenne, le nombre de cibles intactes sur un grand nombre de séances de tir est d'environ 1,26.

65 **1.** L'univers est l'ensemble E des lecteurs potentiels contactés par le centre d'appel. Il y a équiprobabilité.

Schéma de la situation :



$\overline{I \cup N}$ signifie « La personne ne s'abonne à aucune des deux versions ».

Or $P(\overline{I \cup N}) = 0{,}72$ donc $P(I \cup N) = 0{,}28$.

D'où $P(I \cap N) = P(I) + P(N) - P(I \cup N) = 0{,}08$.

Loi de X :

k	2	10	15	20
$P(X = k)$	0,72	0,08	0,12	0,08

2. On note S la variable aléatoire qui indique la somme reçue (en €) pour le contact de 5 000 lecteurs potentiels.

$S = 5\,000X$ d'où $E(X) = 5\,000\ E(X)$.

Or $E(X) = 5{,}64$ donc $E(Y) = 28\,200$ (en €).

Ainsi, le centre d'appel peut espérer percevoir la somme de 28 200 € pour la campagne indiquée.

66 **1.** L'univers est constitué de 90 issues possibles équiprobables.

$P(A) = \dfrac{7 \times 6}{10 \times 9} = \dfrac{7}{15}$, $P(B) = \dfrac{7 \times 6 + 3 \times 2}{90} = \dfrac{8}{15}$,

$P(C) = \dfrac{7 \times 3}{10 \times 9} = \dfrac{7}{30}$,

D est l'événement contraire de B : $P(D) = 1 - P(B) = \dfrac{7}{15}$.

2. a) L'univers est constitué de $n(n-1)$ issues possibles équiprobables.

Loi de X :

k	1	2
$P(X=k)$	$\dfrac{7 \times 6 + (n-7)(n-8)}{n(n-1)} = \dfrac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)}$	$\dfrac{2 \times 7(n-7)}{n(n-1)} = \dfrac{14n - 98}{n(n-1)}$

b) $E(X) = \dfrac{n^2 - 15n + 98 + 2(14n - 98)}{n(n-1)} = \dfrac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}$.

c) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 13x - 98}{x(x-1)}$ définie sur l'intervalle $I = [9\,; +\infty[$.

f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{14(-x^2 + 14x - 7)}{x^2(x-1)^2}$.

Sur I, $f'(x)$ a même signe que le trinôme $-x^2 + 14x - 7$.

Ce trinôme admet dans $\mathbb{R}$ deux racines : $x_1 = 7 - \sqrt{42}$ et $x_2 = 7 + \sqrt{42}$; il est négatif à l'extérieur de ses racines.

Tableau de variation de f :

x	9	13	$7 + \sqrt{42}$	14	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	−	
f	$\dfrac{25}{18}$ ↗	$\dfrac{20}{13}$ ↗	M	↘ $\dfrac{20}{13}$	↘

$E(X) = f(n)$ où n est un entier tel que $n \geqslant 9$.

On déduit du tableau de variation que E(X) est maximale lorsque $n = 13$ ou $n = 14$ et que l'espérance maximale vaut $\dfrac{20}{13}$.

67 **1. a) b)** Voir modèle de feuille de calcul.

c) Saisir en B4 : $\boxed{\text{=ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)}}$.

– Copier cette formule vers le bas jusqu'en B7

– Copier la plage de cellules B4:B7 vers la droite jusqu'en OK4:OK7.

d) Saisir en B10 : $\boxed{\text{=NB.SI(B\$4:B\$7;\$A10)}}$.

Cette instruction indique qu'on dénombre sur la plage B4:B7 le nombre de cibles visées dont le numéro est indiqué dans A10.

– Copier B10 vers le bas jusqu'en B13.

– Copier la plage de cellules B10:B13 vers la droite jusqu'en OK10:OK13.

e) Saisir en B15 : $\boxed{\text{=NB.SI(B10:B13;0)}}$.

Copier vers la droite la cellule B15 jusqu'en OK15.

f) Saisir en B17 : $\boxed{\text{=MOYENNE(B15:OK15)}}$.

2. Tableau des moyennes obtenues lors de dix simulations

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
1,34	1,26	1,24	1,29	1,23	1,33	1,21	1,23	1,31	1,26

Compte tenu de la fluctuation d'échantillonnage, ces valeurs sont en accord avec l'espérance mathématique obtenue dans l'exercice 64 : $E(X) = \dfrac{81}{64} \approx 1{,}26$.

3. Dans le cas de dix tireurs et dix cibles, on obtient un nombre moyen de cibles intactes voisin de 3,5.

Une estimation de E(X) est $E(X) \approx 3{,}5$.

Autrement dit, lorsque dix tireurs tirent sans échec sur dix cibles au hasard, en moyenne 3,5 cibles restent intactes.

Remarque : par la méthode de l'exercice 68, on peut démontrer que $E(X) = 10 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^{10} \approx 3{,}486\,8$.

68 **1.** On peut résumer la situation par un tableau :

Issue	e_1	e_2	…	e_k
Valeur associée par X	x_1	x_2	…	x_k
Probabilité	p_1	p_2	…	p_k

E(X) est la moyenne pondérée des valeurs x_i donc :

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k$ soit $E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_ix_i$.

2. L'espérance de la variable aléatoire X + Y est telle que :

$E(X + Y) = p_1(x_1 + y_1) + p_2(x_2 + y_2) + \ldots + p_k(x_k + y_k)$

$E(X + Y) = \underbrace{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k}_{E(X)} + \underbrace{p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ky_k}_{E(Y)}$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3. a) L'univers contient $4^4 = 256$ issues équiprobables.

À toute issue (nombre de quatre chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4), la variable aléatoire $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ associe une somme de 1 et de 0.

Il y autant de 1 que de chiffres qui manquent dans l'écriture de l'issue donc $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ indique le nombre de chiffres non utilisés.

Ainsi : $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = X$.

Exemple : à l'issue 3113, M_1 associe 0, M_2 associe 1, M_3 associe 0 et M_4 associe 1.

Ainsi, $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ associe $0 + 1 + 0 + 1 = 2$.

b) Loi de M_1

L'événement « $M_1 = 1$ » signifie « Le nombre s'écrit uniquement avec 2, 3 et 4 ».

Il y a 3^4 issues favorables.

k	1	0
$P(M_1 = k)$	$\frac{3^4}{4^4}$	$1 - \frac{3^4}{4^4}$

D'où $E(M_1) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$.

De même, on obtient : $E(M_2) = E(M_3) = E(M_4) = \frac{3^4}{4^4}$.

c) $E(X) = E(M_1 + M_2 + M_3 + M_4)$; donc d'après la question **2.** :

$E(X) = E(M_1) + E(M_2) + E(M_3) + E(M_4)$

$E(X) = 4 \times \frac{3^4}{4^4} = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$ soit $E(X) = \frac{81}{64}$.

Remarque : par cette méthode on retrouve le résultat de l'exercice 64.

Une application de cette méthode dans le cas du prolongement dans l'exercice 67 permet aussi de démontrer que $E(X) = 10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$.

69 L'univers est constitué de $9 \times 8 \times 7$ issues possibles toutes équiprobables.

• On note H : « Alignement en ligne ».

Cet événement est réalisé soit sur la ligne 1, soit sur la ligne 2, soit sur la ligne 3 donc :

$P(H) = \frac{3 \times (3 \times 2 \times 1)}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{28}$.

• On note C : « Alignement en colonne ».

De même : $P(C) = \frac{1}{28}$.

• On note D : « Alignement en diagonale ».

$P(D) = \frac{2 \times (3 \times 2 \times 1)}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{42}$.

• Si on note A l'événement « Les 3 jetons sont alignés », $A = H \cup C \cup D$ (réunion d'événements deux à deux incompatibles).

Ainsi : $P(A) = P(H) + P(C) + P(D)$ soit $P(A) = \frac{2}{21}$.

D'où $P(\overline{A}) = \frac{19}{21}$.

Loi de X :

k	20	α	-2
$P(X = k)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{19}{21}$

$E(X) = \frac{\alpha - 16}{42}$.

Ainsi : $E(X) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 16$.

70 On considère les événements A_1, « Arrêt au 1er feu », et A_2, « Arrêt au 2e feu ».

D'où le tableau de probabilités suivant :

	A_2	$\overline{A_2}$	
A_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{A_1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	1

X est la variable aléatoire donnant le nombre d'arrêts.

Loi de X :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$

D est la variable aléatoire qui donne la durée du trajet en minutes.

$D = 9 + 1{,}5X$ donc $E(D) = 9 + 1{,}5\,E(X)$.

Or $E(X) = 0{,}75$ donc $E(D) = 10{,}125$.

Ainsi, la durée moyenne du trajet sur un grand nombre de trajets est d'environ 10,125 min soit 10 min 7,5 s.

EXERCICES Travail en autonomie (page 314)

A **1.** L'univers est l'ensemble des élèves du lycée.
Il y a équiprobabilité.

a) $P(A \cap B) = \dfrac{60}{660} = \dfrac{1}{11}$.

b) $P(A \cup B) = \dfrac{410}{660} = \dfrac{41}{66}$.

c) $P(C) = \dfrac{306}{660} = \dfrac{51}{110}$.

2. a) Loi de V :

k	0	1	2	3
P(V = *k*)	$\frac{7}{55}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{16}{55}$	$\frac{19}{110}$

b) $E(V) = \dfrac{83}{55} \approx 1{,}5$.

En moyenne, le nombre de visites par mois d'un élève au CDI est environ 1,5.

B **1.** On considère la variable aléatoire X qui indique le prix, en euros, à payer à l'entrée.
Loi de X :

k	0	10	20
P(X = *k*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

E(X) = 15 (en €).
Ainsi, en moyenne, un client peut espérer payer 15 €.
2. Soit Y la variable aléatoire indiquant la recette en euros par jour.
$Y = (1{,}4 \times 80)X$ soit $Y = 112X$.
$E(Y) = 112E(X)$ donc $E(Y) = 1\,680$ (en €).
Or la recette avant la promotion était de 1 600 €.
Ainsi, durant la campagne de promotion, le gérant peut espérer gagner en moyenne 80 € de plus par jour.

C L'univers est constitué de $n(n-1)$ issues possibles équiprobables.
G est la variable aléatoire indiquant le gain, en euros, du joueur.
G prend les valeurs : –6 (tirage RR), 1 (tirage RB ou BR), 7 (tirage RV ou VR), 14 (tirage BV ou VB) et 20 (tirage VV).
Loi de G :

k	–6	1	7	14	20
P(G = *k*)	$\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$	$\frac{2(n-3)}{n(n-1)}$	$\frac{4(n-3)}{n(n-1)}$	$\frac{4}{n(n-1)}$	$\frac{2}{n(n-1)}$

D'où $E(G) = \dfrac{-6n^2 + 72n - 66}{n(n-1)}$.

Dire que le jeu est équitable signifie que $E(G) = 0$.
$E(G) = 0 \Leftrightarrow -6n^2 + 72n - 66 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 12n + 11 = 0$.
Cette équation admet deux solutions entières, 1 et 11.
Or $n \geqslant 5$ donc l'unique solution du problème est $n = 11$.
Ainsi, le jeu est équitable lorsque la composition de l'urne est : 2 jetons verts, 1 jeton bleu et 8 jetons rouges.

D **1.** Tableau des probabilités :

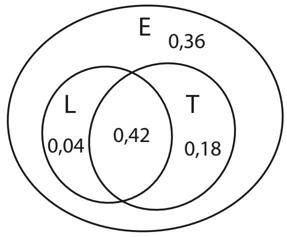
	E	$\overline{\text{E}}$	
M	0,05	0,03	0,08
$\overline{\textbf{M}}$	0,02	0,90	0,92
	0,07	0,93	1

Loi de X :

k	600	700	730	810
P(X = *k*)	0,90	0,03	0,02	0,05

2. On note V la variable aléatoire qui indique le prix de vente, en euros, d'une maquette.
$V = X + 85$ d'où $E(V) = E(X) + 85$.
Or $E(X) = 616{,}10$ donc $E(V) = 701{,}10$ (en €).
Pour espérer un bénéfice moyen de 85 € par maquette, le prix de vente moyen d'une maquette doit être de 701,10 €.

E **1.** Diagramme ensembliste
$P(\overline{L} \cap \overline{T}) = P(\overline{L \cup T}) = 0{,}36$ d'où $P(L \cup T) = 0{,}64$.
Or $P(L \cap T) = P(L) + P(T) - P(L \cup T)$;
donc : $P(L \cap T) = 0{,}46 + 0{,}60 - 0{,}64 = 0{,}42$.



Loi de D :

k	0	204	510	630
P(D = *k*)	0,36	0,04	0,18	0,42

2. Soit C la variable aléatoire qui indique le chiffre d'affaires, en euros, durant la semaine.
$C = 120D$ d'où $E(C) = 120E(D)$.
Or $E(D) = 364{,}56$ donc $E(C) = 43\,747{,}20$ (en €).
Ainsi, la responsable peut espérer un chiffre d'affaires voisin de 43 750 €.