CHAPITRE 10 Produit scalaire : applications

ACTIVITÉS (page 241)

Activité 1

1 $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.

2 a) $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3 a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \dfrac{\pi}{12} = \cos \dfrac{\pi}{12}$.

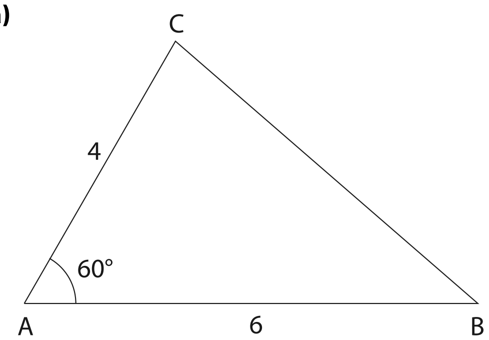
b) $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

$\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{8 + 2\sqrt{12} + 8 - 2\sqrt{12}}{16} = 1$

et $\sin \dfrac{\pi}{12} > 0$; donc $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Activité 2

1 a)



b) $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = BC^2$.

Donc $BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \cos 60°$

$= 16 + 36 - 24 = 28$,

d'où : $BC = 2\sqrt{7}$ cm.

c) $\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2$

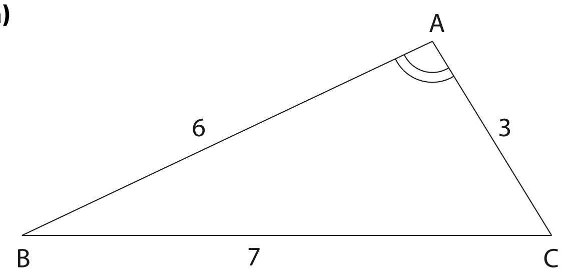
$= \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - 2BC \times BA \cos (\widehat{ABC})$,

soit $16 = 28 + 36 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 6 \cos \widehat{B}$.

Il en résulte que $\cos \widehat{B} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

D'où $\widehat{B} \approx 41°$ et $\widehat{C} \approx 79°$.

2 a)



b) $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$

soit $49 = 9 + 36 - 36 \cos \widehat{A}$

donc $\cos \widehat{A} = \dfrac{36 + 9 - 49}{36} = -\dfrac{4}{36} = -\dfrac{1}{9}$.

D'où : $\widehat{A} \approx 96°$.

PROBLÈME OUVERT

Il existe quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 en remarquant que $\overrightarrow{AB}(-6\,;6)$ et $\overrightarrow{CD}(-8\,;8)$, donc que (AB) // (CD).

La droite (CD) a pour équation $x + y - 8 = 0$.

$d_1 : x - y + 6 = 0$ et $d_2 : x - y - 6 = 0$;

donc : $M_1(1\,;7)$ et $M_2(7\,;1)$.

Si M est un point de (CD), il a pour coordonnées $(x\,;8-x)$.

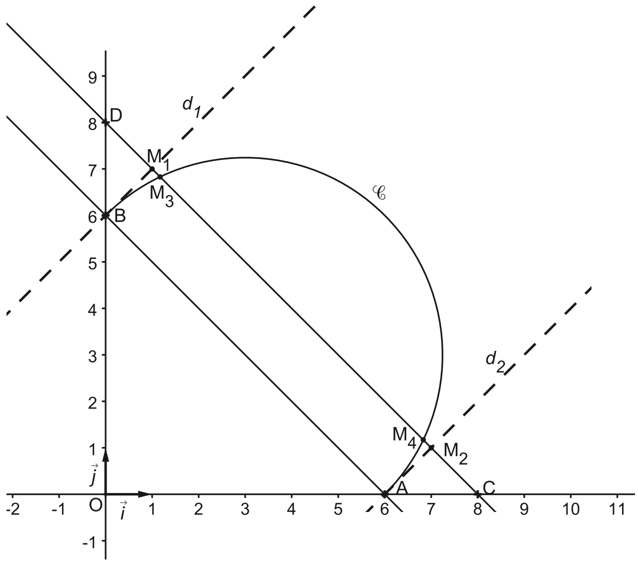
$\overrightarrow{AM}(x-6\,;8-x)$ et $\overrightarrow{BM}(x\,;2-x)$; donc :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = (x-6)x + (8-x)(2-x) = 2x^2 - 16x + 16.$$

Donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 4 + 2\sqrt{2}$;

d'où : $M_3\left(4-2\sqrt{2}\,;4+2\sqrt{2}\right)$ et $M_4\left(4+2\sqrt{2}\,;4-2\sqrt{2}\right)$.



EXERCICES Application (page 245)

1 **a)** $BC^2 = (250)^2 + (340)^2 - 500 \times 340 \cos 75°$;
BC = 366,20 m.

b) $\cos \widehat{B} = \dfrac{(250)^2 + BC^2 - (340)^2}{500 \times BC} \approx 0{,}44$;

$\widehat{B} \approx 63{,}7°$ et $\widehat{C} \approx 41{,}3°$.

2 $\cos \widehat{A} = \dfrac{81 + 25 - 144}{90} = -\dfrac{38}{90}$; d'où $\widehat{A} \approx 115°$.

$\cos \widehat{B} = \dfrac{144 + 25 - 81}{120} = \dfrac{11}{15}$; d'où $\widehat{B} \approx 43°$.

Il en résulte que $\widehat{C} \approx 22°$.

3 $BC^2 = 64 + 64 - 128 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 128 - 64\sqrt{2}$.

$BC^2 = 64\left(2-\sqrt{2}\right)$ et $BC = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$CD^2 = 64 + 36 - 96 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 100 - 48\sqrt{3}$.

$CD^2 = 4\left(25 - 12\sqrt{3}\right)$ et $CD = 2\sqrt{25-12\sqrt{3}}$.

Le périmètre est donc égal à $14 + 2\sqrt{25-12\sqrt{3}} + 8\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

4 **1. a)** $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{64 + 16 - 36}{64} = \dfrac{44}{64} = \dfrac{11}{16}$.

b) $\left(\sin \widehat{ABC}\right)^2 = 1 - \dfrac{121}{256} = \dfrac{135}{256}$ et $\sin \widehat{ABC} > 0$;

d'où : $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

2. a) $AH = 4 \sin \widehat{ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

b) $\text{Aire}(ABC) = \dfrac{1}{2}\, BC \times AH = 3\sqrt{15}$.

5 $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \dfrac{BC^2}{2}$,
soit $64 + 49 = 2AO^2 + 50$.

$2AO^2 = 63$, d'où $AO = \dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{2}$.

De même, la médiane issue de B a pour mesure $\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$ et celle issue de C, $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{2}$.

6 **1.** $MA^2 + MC^2 = 2MB^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ soit $9 + MC^2 = 18 + 8$;

d'où : $MC^2 = 17$ et $MC = \sqrt{17}$.

2. $MB^2 + MD^2 = 2MC^2 + \dfrac{BD^2}{2}$ soit $9 + MD^2 = 34 + 8$;

d'où : $MD^2 = 33$ et $MD = \sqrt{33}$.

7 $AB^2 + BC^2 = 2OB^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ soit $225 + 169 = 2OB^2 + 98$;

$OB^2 = 148$, d'où : $OB = 2\sqrt{37}$ et $DB = 4\sqrt{37}$.

8 $MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \dfrac{AC^2}{2}$

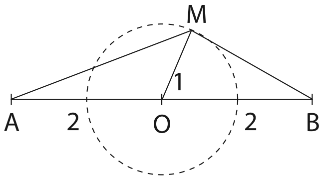
et $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.

Or AC = BD ; d'où : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

9 **1.** $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$,

soit $10 = 2MO^2 + 8$,

donc $MO^2 = 1$.



2. M est un point du cercle 𝒞 de centre O et de rayon 1.

10 **a)** $(x-1)^2+(y+3)^2=4$.
b) $\overrightarrow{BC}(4\,;1)$, $BC^2=17$; d'où l'équation :
$(x+1)^2+(y-1)^2=17$.

11 **1.** Le rayon est 2, d'où l'équation :
$(x-3)^2+(y-2)^2=4$.
2. Le rayon est 2, d'où l'équation : $(x+2)^2+(y-4)^2=4$.

12 **a)** Le centre I a pour coordonnées $(0;\ 1)$; d'où l'équation : $x^2+y^2-2y=0$.
b) « M appartient au cercle de diamètre [BC] » équivaut à « $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ ».
$\overrightarrow{MB}(2-x\,;1-y)$ et $\overrightarrow{MC}(-4-x\,;-1-y)$;
d'où : $(2-x)(-4-x)+(1-y)(-1-y)=0$,
soit $x^2+y^2+2x-9=0$.
c) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-12+12=0$, donc le triangle MON est rectangle en O.
Le cercle circonscrit à ce triangle est l'ensemble des points $P(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=0$,
soit $(x+3)(x-4)+(y-2)(y-6)=0$.
D'où : $x^2+y^2-x-8y=0$.

13 $OC=\sqrt{13}$. Le milieu I de [OC] a pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$, donc le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation : $x^2+y^2-2x-3y=0$.

14 **1.** $\mathscr{C}$ a pour équation $(x+2)^2+(y-3)^2=10$,
soit $x^2+y^2+4x-6y+3=0$.
2. A et B ont pour ordonnée $y=0$. Donc leurs abscisses sont les solutions de l'équation $x^2+4x+3=0$.
Donc : $A(-3\,;0)$ et $B(-1\,;0)$.
De même, C et D ont pour abscisse $x=0$. Donc leurs ordonnées sont solutions de l'équation $y^2-6y+3=0$.
D'où : $C\left(0\,;3-\sqrt{6}\right)$ et $D\left(0\,;3+\sqrt{6}\right)$.

15 **a)** $(x-1)^2+(y-1)^2=4$: cercle de centre $I(1\,;1)$ et de rayon 2.
b) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{4}$: cercle de centre $I\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$.
c) $x^2+y^2-\dfrac{7}{3}x-\dfrac{8}{3}y=0$, soit $\left(x-\dfrac{7}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{113}{36}$:
cercle de centre $I\left(\dfrac{7}{6}\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{113}}{6}$.
d) $x^2+y^2-4x+y+1=0$, soit $(x-2)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$:
cercle de centre $I\left(2\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

16 **a)** $(x-1)^2+(y+2)^2=-4$ et $-4<0$.
b) $(x-1)^2+(y-2)^2=-2$ et $-2<0$.

17 **1.** $(x-1)^2+(y-1)^2=10$: cercle de centre $I(1\,;1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.
2. Si $y=0$, $x^2-2x-8=0$; d'où $x_1=-2$ et $x_2=4$.
Les intersections A et B avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives $(-2\,;0)$ et $(4\,;0)$.
Si $x=0$, $y^2-2y-8=0$, on obtient $C(0\,;-2)$ et $D(0\,;4)$.

18 **a)** Cercle de centre O et de rayon 2, soit $\mathscr{C}_3$.
b) Cercle de centre $I(1\,;-1)$ passant par O, soit $\mathscr{C}_2$.
c) Cercle de centre $J(2\,;\ 0)$ passant par le point de coordonnées $(0\,;2)$, soit $\mathscr{C}_1$.

19 **1.** $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$: cercle de centre $I\left(2\,;\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
2. Le milieu de [AB] est I, centre de $\mathscr{C}$, et $A\in\mathscr{C}$ car $1+1-4-3+5=0$, d'où le résultat.

20 **1.** $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi}{12}-\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$.
2. • $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
• $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

21 **1.** $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$.
2. $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
On trouve de même : $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

22 $A=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$
$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x$
$=2\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x=2\times\dfrac{1}{2}\sin x=\sin x$.

23 **a)** $\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$.
b) $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x-\cos x$.
c) $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin x\sin\dfrac{\pi}{3}$
$=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

24 • $A(x)=\sin(-x)=-\sin x$.
• $B(x)=\cos x$.
• $C(x)=\cos 3x$.

25 **1. a)** $AH=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$;
d'où $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ dans le triangle ADH.
$(\sin\alpha)^2=1-(\cos\alpha)^2=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$ et $\sin\alpha>0$;
d'où : $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
b) $BH=\sqrt{5}$ donc $\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
2. a) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$=\dfrac{6}{5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{5\sqrt{2}}+\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
b) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

26 **a)** $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$.

b) $\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

27 **a)** $\sin x < 0$ et $(\sin x)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$;

d'où : $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

28 **a)** $\cos x < 0$ et $(\cos x)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$;

donc : $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times -\frac{3}{4} \times -\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

$\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = \frac{7}{8} - 1 = -\frac{1}{8}$.

29 $\left(\cos \frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

et $\cos \frac{\pi}{8} > 0$;

donc : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

$\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{8} > 0$;

donc : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

30 **a)** $1 + \cos 2x + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x$
$= \cos x(2 \cos x + 1)$.

b) $(\cos x - \sin x)^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 - 2 \sin x \cos x$
$= 1 - \sin 2x$.

c) $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

EXERCICES Activités de recherche (page 252)

35 **Deux solutions pour un problème**

• ***Les outils :***
– Équation d'un cercle.
– Relation de Chasles et produit scalaire.

• ***Les objectifs :***
– Trouver un ensemble de points avec et sans repère.
– Reconnaître une équation d'un cercle.

A. Avec un repère

1. a) A(2 ; 0), B(2 ; 2), C(0 ; 2), I(1 ; 1) et M(x ; y).

$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = (-x)(2 - x) + (-y)(-y)$
$= x^2 + y^2 - 2x$.

$MA^2 + MC^2 = (2 - x)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2$
$= 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 8$.

b) $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = 4$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ **[1]**.

$M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **[2]**.

c) **[1]** s'écrit $(x - 1)^2 + y^2 = 5$,
donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre J(1 ; 0) et de rayon $\sqrt{5}$.
Or $JC = JB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = \sqrt{5}$; donc $\mathscr{E}$ passe par B et C.
[2] s'écrit $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, donc $\mathscr{F}$ est le cercle de centre I(1 ; 1) et de rayon $\sqrt{2}$. Or $IO^2 = 2$, donc $\mathscr{F}$ est le cercle circonscrit au carré OABC.

B. Sans repère

1. a) $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JO}) \cdot (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA})$.
Or $\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{JO}$; donc $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = MJ^2 - JO^2 = MJ^2 - 1$.

b) $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow MJ^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow MJ = \sqrt{5}$.
Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre J passant par B.

2. a) $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} = 2MI^2 + 4$.

b) $M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow 2MI^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow 2MI^2 = 2$.
Donc $\mathscr{F}$ est le cercle de centre I passant par O, c'est-à-dire le cercle circonscrit au carré OABC.

36 **Trigonométrie et pentagone régulier**

• ***Les outils :***
– Produit scalaire.
– Angle de deux vecteurs.
– Formules de duplication.

• ***Les objectifs :***
– Trouver l'angle de deux vecteurs en utilisant deux formes du produit scalaire.
– Établir des égalités d'angles à l'aide des formules de duplication.

1. a) $PH^2 = OP^2 + OH^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$, soit $PH = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

b) $OI = PI - PO = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4}$

et $OJ = OP + PJ = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{4}$.

c) B se projette orthogonalement en I sur (OA) ;
donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA}$.
Or $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de même sens,
donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OJ} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ car $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires de sens contraires.

2. a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha = \cos \alpha$
et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos \beta = \cos \beta$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, soit $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

• $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos \beta = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$, soit $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

• $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OJ} = OJ^2 = OC \times OJ \cos \gamma$, soit $\cos \gamma = \frac{OJ}{OC} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

3. a) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16} - 1 = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 8}{8}$,

soit $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos \beta$.

$\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = 2\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{16} - 1 = \dfrac{6+2\sqrt{5}-8}{8} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$,
soit $\cos 2\gamma = \cos\alpha$.

b) $\beta = 2\alpha$ et $\alpha = 2\gamma$.

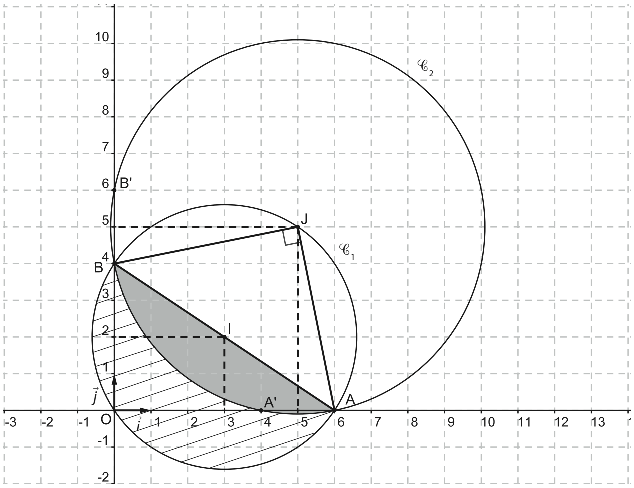
c) $\beta + \gamma = \pi$, soit $2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \pi$ ou $5\alpha = 2\pi$.

d) $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$, $\beta = \dfrac{4\pi}{5}$ et $\gamma = \dfrac{\pi}{5}$.

De plus, (OA) est axe de symétrie,
donc : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA} = \dfrac{2\pi}{5}$.
ABCDE est donc un pentagone régulier.

37 Narration de recherche

Une figure précise est indispensable.



Le cercle $\mathscr{C}_1$ a pour centre I(3 ; 2) et coupe l'axe des abscisses en A(6 ; 0) et O(0 ; 0), et l'axe des ordonnées en B(0 ; 4).

De même, $\mathscr{C}_2$ a pour centre J(5 ; 5) et coupe l'axe des abscisses en A(6 ; 0) et A'(4 ; 0), et l'axe des ordonnées en B(0 ; 4) et B'(0 ; 6).

De plus, J appartient à $\mathscr{C}_1$, car $25 + 25 - 30 - 20 = 0$, et [AB] est un diamètre de $\mathscr{C}_1$.

Donc le triangle AJB est rectangle et isocèle.

• Cherchons l'aire $\mathscr{A}$ de la partie grisée de la figure.

C'est l'aire d'un quart de cercle de $\mathscr{C}_2$ moins l'aire du triangle rectangle isocèle BJA.

$JB = JA = \sqrt{26}$, donc : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{4}\pi \times 26 - \dfrac{1}{2}(JB)^2 = \dfrac{13\pi}{2} - 13$.

• Calculons l'aire de $\mathscr{E}$ (partie hachurée).

Le demi-cercle de $\mathscr{C}_1$ de diamètre [AB] a pour aire :
$\dfrac{1}{2}\pi \times OI^2 = \dfrac{13\pi}{2}$.

Donc l'aire de $\mathscr{E}$ est égale à $\dfrac{13\pi}{2} - \left(\dfrac{13\pi}{2} - 13\right) = 13$.

D'où le résultat.

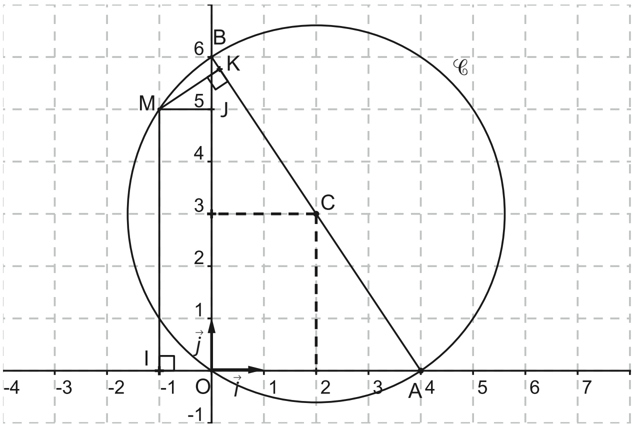
38 Narration de recherche

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ **[1]**.

A a pour coordonnées (4 ; 0) et B(0 ; 6).

L'abscisse $x < 0$ de M d'ordonnée 5 est solution de l'équation $x^2 + 25 - 4x - 30 = 0$ obtenue en remplaçant y par 5 dans **[1]** :

$x^2 - 4x - 5 = 0$, les solutions sont $x = -1$ et $x = 5$;
or $x < 0$, donc M a pour coordonnées (–1 ; 5).



Il en résulte que I a pour coordonnées (–1 ; 0) et J(0 ; 5).

Il reste à trouver les coordonnées de K.

La droite (AB) a pour équation $3x + 2y - 12 = 0$ et $\overrightarrow{AB}(-4\,;6)$, donc le vecteur $\vec{n}(-2\,;\,3)$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (MK) qui a donc une équation de la forme $-2x + 3y + c = 0$.

Or $M \in (MK)$; donc : $2 + 15 + c = 0$, soit $c = -17$.

Les coordonnées de K sont donc les solutions du système
$\begin{cases} -2x + 3y - 17 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$

K a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{13}\,;\dfrac{75}{13}\right)$.

$\overrightarrow{IJ}(1\,;5)$, $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{15}{13}\,;\dfrac{75}{13}\right)$ et $1 \times \dfrac{75}{13} - (5)\left(\dfrac{15}{13}\right) = 0$;
donc I, J, K sont alignés.

39 Narration de recherche

$A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ avec $0 < a < 4$ et $B\left(4\,;\dfrac{1}{4}\right)$; donc $\overrightarrow{AB}\left(4 - a\,;\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{a}\right)$,
soit $\overrightarrow{AB}\left(4 - a\,;\dfrac{a-4}{4a}\right)$.

Il en résulte que $\vec{n}(4a\,;-1)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Ce vecteur est un vecteur normal à la droite d qui a donc une équation de la forme $4ax - y + c = 0$.

Or $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right) \in d$; donc : $4a^2 - \dfrac{1}{a} + c = 0$ et $c = \dfrac{1}{a} - 4a^2$.

Il en résulte que d a pour équation $4ax - y + \dfrac{1}{a} - 4a^2 = 0$.

Les coordonnées de C vérifient :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ 4ax - y + \dfrac{1}{a} - 4a^2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} & \textbf{[1]} \\ 4a^2x^2 + (1 - 4a^3)x - a = 0 & \textbf{[2]} \end{cases}$$

[2] a pour solution $x_1 = a$ et $x_2 = -\dfrac{1}{4a^2}$; donc C a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4a^2}\,;-4a^2\right)$ et $\overrightarrow{CB}\left(4 + \dfrac{1}{4a^2}\,;\dfrac{1}{4} + 4a^2\right)$.

Le coefficient directeur de la tangente en A est $-\dfrac{1}{a^2}$,
donc $\vec{u}\left(1\,;-\dfrac{1}{a^2}\right)$ est un vecteur directeur de T.

De plus : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$; donc T et d sont perpendiculaires.

40 TP – Étude d'une famille de cercles

2. a) Le point I semble se déplacer sur la droite (AB).

b) Les cercles $\mathscr{C}_m$ semblent tous passer par les points C(4 ; 4) et O(0 ; 0).

3. a) I a pour coordonnées $\left(\frac{4+m}{2} ; \frac{4-m}{2}\right)$.
La droite (AB) a pour équation $x + y - 4 = 0$.
$\frac{4+m}{2} + \frac{4-m}{2} - 4 = 0$, donc $I \in (AB)$.
b) Le cercle $\mathcal{C}_m$ a une équation de la forme
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
$O \in \mathcal{C}_m$, donc $c = 0$.
De plus : $a = -2x_I = 4 + m$ et $b = -2y_I = -(4 - m)$.
Donc $x^2 + y^2 - (4 + m)x - (4 - m)y = 0$.
Le cercle $\mathcal{C}_m$ passe par O et par C(4 ; 4). En effet :
$16 + 16 - (4 + m)4 - (4 - m)4 = 32 - 16 - 4m - 16 + 4m = 0$.

41 **TP – Cercle passant par un point et tangent à une droite donnée**
2. a) Le triangle ACB est isocèle en C donc CB = CA.
De plus, d' est perpendiculaire à d, donc d est tangente en B à $\mathcal{C}$.
b) B a pour coordonnées $y = 0$ et $x = 4$, donc $\overrightarrow{AB}(7 ; -1)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ donc Δ a une équation de la forme $7x - y + c = 0$.
Le milieu I de [AB], de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, est un point de Δ, donc $\frac{7}{2} - \frac{1}{2} + c = 0$, soit $c = -3$.
Δ a pour équation : $7x - y - 3 = 0$.
La droite d' est perpendiculaire à d donc $\vec{u}(4 ; 3)$ est un vecteur normal à d'.
Ainsi, d' a une équation de la forme $4x + 3y + c = 0$.
Or : $B \in d'$; donc : $c = -16$.
Il en résulte que $4x + 3y - 16 = 0$ est une équation de d'.
c) Les coordonnées de C vérifient $\begin{cases} 4x + 3y - 16 = 0 \\ 7x - y - 3 = 0 \end{cases}$,
qui équivaut à $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0 \\ 25x - 25 = 0 \end{cases}$, soit $x = 1$ et $y = 4$.
Ainsi, C a pour coordonnées (1 ; 4).
d) $\overrightarrow{CB}(3 ; 4)$; donc : $CB = \sqrt{9 + 16} = 5$.
Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour équation $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

EXERCICES Entraînement (page 256)

DE TÊTE

42 $BC^2 = 25 + 64 - 40 = 49$; BC = 7.

43 $\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{3}$ et $\cos\widehat{A} = \frac{7}{9}$.

44 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

45 $4 + 1 - 4 - 4 + 3 = 0$, donc $A \in \mathcal{C}$.

46 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

47 I(–1 ; 3) et $r = 2\sqrt{3}$.

48 $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 32 = 40$.

LONGUEURS ET ANGLES

49 **1.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos A$, donc :
$\cos\widehat{A} = \frac{20^2 + 28^2 - 32^2}{2 \times 20 \times 28} = \frac{160}{40 \times 28} = \frac{1}{7}$; $\widehat{A} \approx 81{,}8°$.
• De même :
$\cos\widehat{C} = \frac{28^2 + 32^2 - 20^2}{2 \times 28 \times 32} = \frac{1\,408}{2 \times 28 \times 32} = \frac{11}{14}$; $\widehat{C} \approx 38{,}2°$.
• De même :
$\cos\widehat{B} = \frac{20^2 + 32^2 - 28^2}{2 \times 20 \times 28} = \frac{640}{40 \times 32} = \frac{1}{2}$; $\widehat{B} = 60°$.
2. Dans le triangle OAB :
$OA^2 = AB^2 + BO^2 - 2 \times AB \times BO \times \cos\widehat{B}$.
$OA^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \times 20 \times 16 \times \frac{1}{2} = 336$.
Donc $OA = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$.

50 $b^2 + c^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}$;
$a^2 + c^2 = 2\,m_B^2 + \frac{b^2}{2}$;
$a^2 + b^2 = 2m_C^2 + \frac{c^2}{2}$.
Par addition :
$2b^2 + 2a^2 + 2c^2 = 2(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$;
d'où : $m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

51 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos 60°$
$= a^2 + 9a^2 - 3a^2 = 7a^2$.
Donc : $AD = a\sqrt{7}$.

52 *Corrigé dans le manuel.*

53 **1.** $MA^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$;
$MB^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$;
$MC^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$.
2. $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -12x + 2y + 5$, donc M est un point de la droite d'équation $y = 6x - \frac{5}{2}$.

54 $\cos\widehat{C} = \frac{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 10^2}{2 \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; donc : $\widehat{C} = \frac{3\pi}{4}$.

55 **1.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
soit : $12\sqrt{3} = 24 \cos\widehat{BAC}$;
donc : $\cos\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
2. $\overrightarrow{BC}^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= 16 + 36 - 24\sqrt{3} = 52 - 24\sqrt{3}$.
D'où : BC ≈ 32 mm.

POUR ALLER PLUS LOIN

56 **1.** Figure (1) : CH = AC sin $\widehat{\text{A}}$ = b sin $\widehat{\text{A}}$.
Figure (2) : CH = AC sin$\left(\pi - \widehat{\text{A}}\right)$ = b sin $\widehat{\text{A}}$.
2. aire (ABC) $= \dfrac{1}{2}$ AB × CH $= \dfrac{1}{2}$ bc sin $\widehat{\text{A}}$.

57 *Corrigé dans le manuel.*

58 **1.** aire (ABC) $= \dfrac{1}{2}$ AB × AC × sin $\widehat{\text{A}}$, d'où :
$\sin \widehat{\text{A}} = \dfrac{2 \times 18}{6 \times 10} = \dfrac{36}{60} = \dfrac{3}{5}$.
$\left(\cos \widehat{\text{A}}\right)^2 = 1 - \left(\sin \widehat{\text{A}}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$.
Or $\widehat{\text{A}}$ est obtus, donc $\cos \widehat{\text{A}} = -\dfrac{4}{5}$.
2. $\text{BC}^2 = 36 + 100 + 120 \times \dfrac{4}{5} = 136 + 96 = 232$;
d'où : BC $= 2\sqrt{58}$, BC ≈ 15,2 cm.

59 $\dfrac{a}{\sin \widehat{\text{A}}} = \dfrac{abc}{2\text{S}}$; $\dfrac{b}{\sin \widehat{\text{B}}} = \dfrac{abc}{2\text{S}}$; $\dfrac{c}{\sin \widehat{\text{C}}} = \dfrac{abc}{2\text{S}}$.
D'où le résultat.

60 **1.** $\widehat{\text{A}} = 180° - 80° = 100°$.
2. $\dfrac{b}{\sin 35°} = \dfrac{c}{\sin 45°} = \dfrac{4}{\sin 100°}$, ce qui donne :
$b = \dfrac{4 \sin 35°}{\sin 100°}$ et $c = \dfrac{4 \sin 45°}{\sin 100°}$.
$b \approx 2{,}33$ et $c \approx 2{,}87$.

61 *Corrigé dans le manuel.*

62 **1. a)** $\sin \dfrac{\widehat{\text{A}}}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{16 + 64}} = \dfrac{4}{4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;
$\cos \dfrac{\widehat{\text{A}}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
b) $\sin \widehat{\text{A}} = 2 \sin \dfrac{\widehat{\text{A}}}{2} \cos \dfrac{\widehat{\text{A}}}{2} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$.
$\cos \widehat{\text{A}} = 2\left(\cos \dfrac{\widehat{\text{A}}}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{8}{5} - 1 = \dfrac{3}{5}$.
2. OB $= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$;
donc $\sin \dfrac{\widehat{\text{B}}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ et $\cos \dfrac{\widehat{\text{B}}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.
$\sin \widehat{\text{B}} = 2 \times \dfrac{2}{\sqrt{13}} \times \dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{12}{13}$ et $\cos \widehat{\text{B}} = \dfrac{5}{13}$.
3. a) $\cos \widehat{\text{C}} = \cos\left[\pi - \left(\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{B}}\right)\right] = -\cos\left(\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{B}}\right)$.
$\sin \widehat{\text{C}} = \sin\left[\pi - \left(\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{B}}\right)\right] = \sin\left(\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{B}}\right)$.
b) $\cos \widehat{\text{C}} = -\cos \widehat{\text{A}} \cos \widehat{\text{B}} + \sin \widehat{\text{A}} \sin \widehat{\text{B}}$
$= -\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{13} + \dfrac{4}{5} \times \dfrac{12}{13} = \dfrac{33}{65}$.
$\sin \widehat{\text{C}} = \sin \widehat{\text{A}} \cos \widehat{\text{B}} + \sin \widehat{\text{B}} \cos \widehat{\text{A}}$
$= \dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{56}{65}$.
c) $\dfrac{\text{CA}}{\sin \widehat{\text{B}}} = \dfrac{\text{CB}}{\sin \widehat{\text{A}}} = \dfrac{\text{AB}}{\sin \widehat{\text{C}}} = \dfrac{14 \times 65}{56} = \dfrac{65}{4}$;
d'où : CA $= \dfrac{65}{4} \times \dfrac{12}{13} = 15$ et CB $= \dfrac{65}{4} \times \dfrac{4}{5} = 13$.

CERCLE ET PRODUIT SCALAIRE

63 **a)** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
b) AB $= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$; donc : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$.
c) $r = 4$; donc : $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

64 **a)** $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{30}{4}$: cercle de centre $\text{I}\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.
b) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 6 = 0$
soit $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{58}{4}$: cercle de centre $\text{I}\left(-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$
et de rayon $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$.
c) $x^2 + y^2 - 2x - 3y - \dfrac{1}{3} = 0$, soit $(x - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{43}{12}$:
cercle de centre $\text{I}\left(1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{43}}{2\sqrt{3}}$.

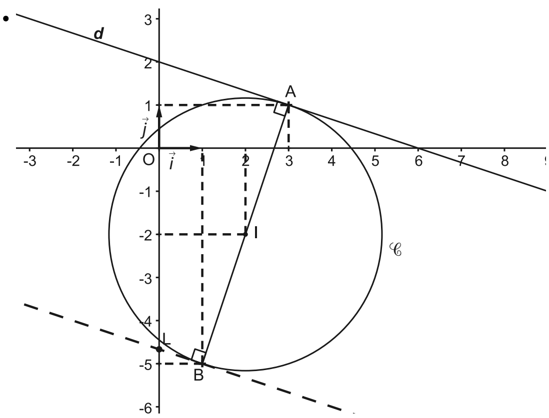
65 **1.** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ ou $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$.
2. a) Les abscisses de A et B sont solutions de $x^2 - 2x - 3 = 0$;
d'où : A(–1 ; 0) et B(3 ; 0).
De même, les ordonnées de C et D sont solutions de $y^2 + 4y - 3 = 0$;
d'où : $\text{D}\left(0 ; -2 - \sqrt{7}\right)$ et $\text{C}\left(0 ; -2 + \sqrt{7}\right)$.
b) $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} = -3$;
$\overrightarrow{\text{OC}} \cdot \overrightarrow{\text{OD}} = \left(2 + \sqrt{7}\right)\left(2 - \sqrt{7}\right) = -3$.

66 *Corrigé dans le manuel.*

67 *Corrigé dans le manuel.*

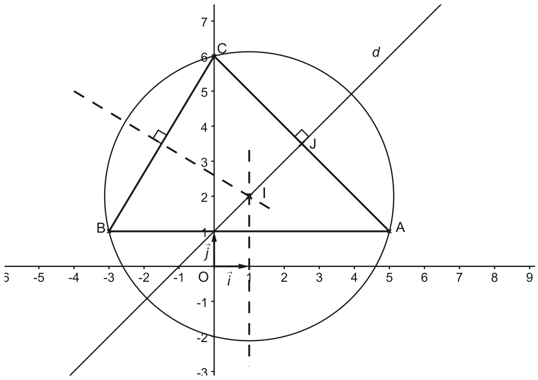
68 $\overrightarrow{\text{OA}}(1 ; 2)$ et $\vec{u}(2 ; -1)$ est un vecteur directeur de d, O ∈ d et $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \vec{u} = 0$; donc d est tangente en O au cercle $\mathscr{C}$.

69 **1.**



2. Les coordonnées de A et B vérifient l'équation de $\mathscr{C}$.
De plus, I(2 ; –2) est le centre de $\mathscr{C}$ et le milieu de [AB].
Donc, A et B sont diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.
3. a) $\overrightarrow{\text{IA}}(1 ; 3)$ et d a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3 ; 1)$;
$\overrightarrow{\text{IA}} \cdot \vec{u} = 0$, donc d et (IA) sont perpendiculaires,
et d est tangente à $\mathscr{C}$ en A.
b) A et B étant diamétralement opposés, les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points sont parallèles.

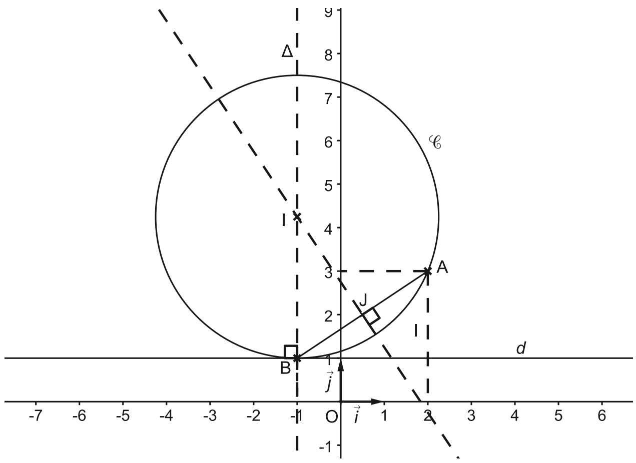
70 **1.**



2. a) $x = 1$ est une équation de la médiatrice de [AB].
$\overrightarrow{AC}(-5\,;5)$, donc $\vec{u}(-1\,;1)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\vec{u}$ est normal à d qui a donc une équation de la forme $-x + y + c = 0$.
Or J, milieu de [AC], a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$ et $J \in d$;
donc $-\frac{5}{2} + \frac{7}{2} + c = 0$ soit $c = -1$.
Ainsi, d a pour équation $x - y + 1 = 0$.
b) Il en résulte que I a pour coordonnées $(1\,;2)$.
3. $IA = \sqrt{17}$, donc $\mathscr{C}$ a pour équation : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

71 **1.** $A \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 5a + b + c = -26$ **[1]**.
$B \in \mathscr{C} \Leftrightarrow -3a + b + c = -10$ **[2]**.
$C \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 6b + c = -36$ **[3]**.
2. a) À partir de **[1] – [2]**, on obtient $8a = -16$, soit $a = -2$.
b) Avec **[2]** et **[3]** : $\begin{cases} b + c = -16 \\ 6b + c = -36 \end{cases}$
donc $b = -4$ et $c = -12$.
3. a) $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
ou $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$.
On retrouve le résultat de l'exercice 70 : le centre de I(1 ; 2) et le rayon $\sqrt{17}$.

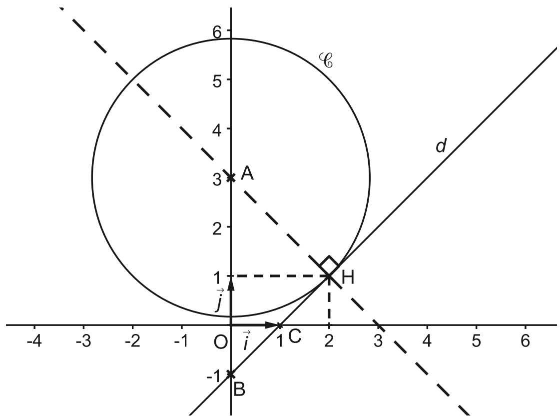
72 **1. a)** Si $\mathscr{C}$ existe, alors IA = IB, donc I appartient à la médiatrice de [AB].
b) Si $\mathscr{C}$ existe, d étant tangente en B à $\mathscr{C}$, (IB) est perpendiculaire à d.
c) La médiatrice de [AB] et Δ sont sécantes en I, d'où l'existence d'un cercle unique.



2. a) Le milieu J de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$;
$\overrightarrow{AB}(-3\,;-2)$ est un vecteur normal à la médiatrice, qui a donc une équation de la forme $-3x - 2y + c = 0$.

Or J appartient à la médiatrice de [AB], donc $-\frac{3}{2} - 4 + c = 0$
soit $c = \frac{11}{2}$, et $3x + 2y - \frac{11}{2} = 0$ est une équation de la médiatrice de [AB].
b) I a pour abscisse -1, donc son ordonnée est telle que $-3 + 2y - \frac{11}{2} = 0$; d'où $y = \frac{17}{4}$ et $I\left(1\,;\frac{17}{4}\right)$.
$\mathscr{C}$ a donc pour équation $(x+1)^2 + \left(y - \frac{25}{8}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{169}{16}$.

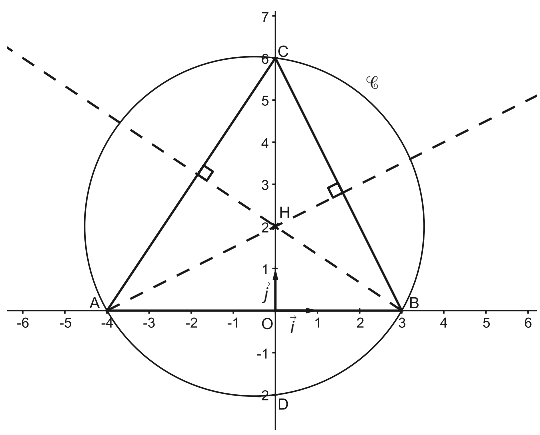
73 **1.** $\mathscr{C}$ est le cercle de rayon [AH], où H est le point d'intersection de d et de la perpendiculaire Δ à d passant par A.



2. a) $\vec{u}(1\,;1)$ est un vecteur directeur de d, $\Delta \perp d$;
donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ et Δ a une équation de la forme $x + y + c = 0$.
Or $A \in \Delta$; donc $0 + 3 + c = 0$ soit $c = -3$.
Donc Δ a pour équation $x + y - 3 = 0$.
H$(x\,; y)$ appartient à d et à $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$
$\Leftrightarrow \quad x = 2$ et $y = 1$.
Donc H(2 ; 1).
b) $\overrightarrow{AH}(2\,;-2)$, donc $AH^2 = 8$ et $AH = 2\sqrt{2}$.
D'où une équation de $\mathscr{C}$, de centre A et de rayon AH :
$x + (y-3)^2 - 8 = 0$.

74 **1.** $\overrightarrow{MA}(-1 - x\,; 4 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(5 - x\,; 2 - y)$;
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (x+1)(x-5) + (y-4)(y-2)$ soit
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3$.
2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$ équivaut à $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ soit $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.
Donc M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I(2 ; 3) et de rayon 5.

75 **1.**

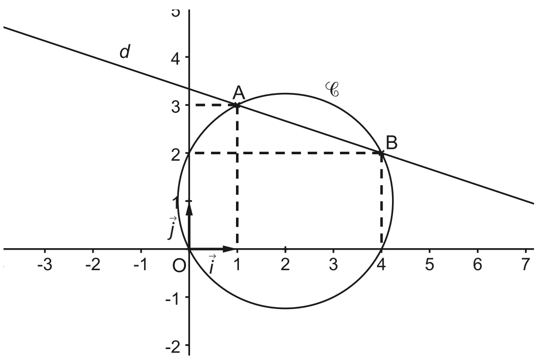


2. a) Pour A et B, $y = 0$; donc $x^2 + x - 12 = 0$.
Les solutions sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -4$.
D'où : $A(-4\,;0)$ et $B(3\,;0)$.
Pour C et D, $x = 0$; donc $y^2 - 4y - 12 = 0$.
Les solutions sont $y_1 = -2$ et $y_2 = 6$.
Donc : $C(0\,;6)$ et $D(0\,;-2)$.
b) $H(0\,;2)$; $\overrightarrow{AH}(4\,;2)$, $\overrightarrow{CB}(3\,;6)$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$, donc (AH) et (CO) sont deux hauteurs du triangle ABC et H est donc l'orthocentre de ce triangle.

76 **1. a)** $A(1\,;1)$; $f'(1) = 2$ et $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.
Donc T_1 a pour équation $y = 2(x-1) + 1$ soit $y = 2x - 1$ et T_2 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
b) M a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et $N(-1\,;0)$.
2. $AM = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $AN = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;
donc $\cos\alpha = \dfrac{AN^2 + AM^2 - MN^2}{2AM \times AN} = \dfrac{5 + \dfrac{5}{4} - \dfrac{9}{4}}{5} = \dfrac{4}{5}$.
D'où : $\alpha \approx 37°$.

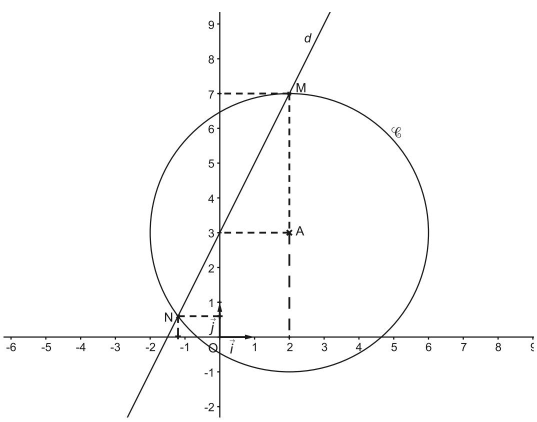
77 *Corrigé dans le manuel.*

78 **1.**



2. Les coordonnées de A et B vérifient le système (S)
$$\begin{cases} x = 10 - 3y \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0. \end{cases}$$
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 3y \\ 100 - 60y + 9y^2 + y^2 - 40 + 12y - 2y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 3y \\ 10y^2 - 50y + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 3y \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 3y \\ y = 2 \text{ ou } y = 3 \end{cases}.$$
D'où : $A(4\,;2)$ et $B(1\,;3)$.

79 **1.**



2. a) 𝒞 de centre $A(2\,;3)$ et de rayon 4 : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ ou $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.
b) Les coordonnées de M et N vérifient le système (S) :
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \end{cases}$$
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{6}{5}. \end{cases}$$
Donc : M a pour coordonnées $(2\,;7)$ et $N\left(-\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{3}{5}\right)$.

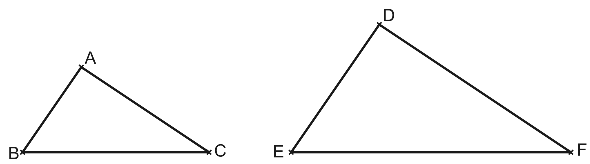
80 **1.** $\overrightarrow{MA}(-1-x\,;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(3-x\,;4-y)$;
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}(2-2x\,;6-2y)$.
$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA} = (2-2x)(-1-x) + (6-2y)(2-y)$.
2. $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5y + 5 = 0$.
M décrit le cercle 𝒞 de centre $I\left(0\,;\dfrac{5}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

81 *Corrigé dans le manuel.*

82 **1.** $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$.
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$; or $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2. a) $M \in$ 𝒞 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = 24 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 12$.
b) $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = 12$.
$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens ;
donc $IH \times AB = 12$, soit $IH = 2$.
L'ensemble 𝒞 est la droite Δ perpendiculaire en H à (AB).

83 L'algorithme proposé a pour objectifs :
1. de calculer la mesure d'un côté d'un triangle connaissant la mesure de deux côtés et de l'angle formé par ces deux côtés ;
2. de calculer alors le périmètre du triangle.

84 **1.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\widehat{BAC}$.
a) Si $\widehat{BAC}$ est obtus, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) < 0$ donc $BC^2 > AB^2 + AC^2$, donc l'implication est vraie.
b) c) Réciproquement, si $BC^2 > AB^2 + AC^2$,
alors $-2AB \times AC \times CD\,\widehat{BAC} > 0$,
donc $\cos\widehat{BAC} < 0$ et $\widehat{BAC}$ obtus.
La réciproque est donc vraie.
2. a) L'implication est vraie, on peut calculer les trois angles avec les formules du type $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$.
b) c) La réciproque est fausse :



3. $\sin 2x = 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 1) = 0$.
Si $\cos x = 1$, alors $\sin 2x = 2\sin x$.
La réciproque est fausse.

LES FORMULES D'ADDITION ET DE DUPLICATION

85 **a)** $\cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}$.

b) $\cos 2x = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$.

86 **a)** $(\sin x)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ et $\sin x < 0$; donc $\sin x = -\frac{3}{5}$.

$\cos 2x = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$; $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

b) $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos 2x = -\frac{7}{9}$; $\sin 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

87 $A = \sin(2x - 3x) = \sin(-x) = -\sin x$.
$B = \cos(4x - 3x) = \cos x$.

88 **a)** $\sqrt{2}\left[(\sin x)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\cos x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \cos x - \sin x$.

b) $2\left[(\sin x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\cos x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$.

89 *Corrigé dans le manuel.*

90 **1.** $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 2x$.

2. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x}$.

Or : $\frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$ car $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$,
donc $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$.

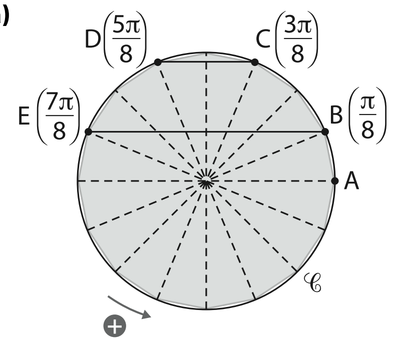
91 *Corrigé dans le manuel.*

92 **1.** $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{\sqrt{5x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. $\sin\theta = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

93 **1.** L'angle au centre d'un polygone régulier de 16 côtés vaut $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$; donc $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{8}$.

2. a)



b) $C\left(\sin\frac{\pi}{8} ; \cos\frac{\pi}{8}\right)$; $D\left(-\sin\frac{\pi}{8} ; \cos\frac{\pi}{8}\right)$;

$E\left(-\cos\frac{\pi}{8} ; \sin\frac{\pi}{8}\right)$.

3. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 2$.

94 *Corrigé dans le manuel.*

AVEC LES TICE

95 **2. a)** $A(3 ; 1)$.
Δ a une équation de la forme $-3x + 4y + c = 0$.
Or $A \in \Delta$; donc : $-9 + 4 + c = 0$ soit $c = 5$.
Donc $\Delta : 3x - 4y - 5 = 0$.

b) Les coordonnées de B et C vérifient le système (S) :

$$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0. \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ x^2 - 6x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ ou } x = 7. \end{cases}$$

D'où : $C(-1 ; -2)$ et $B(7 ; 4)$.

c) Les tangentes T_1 et T_2 ont chacune une équation de la forme $4x + 3y + c = 0$.
$B \in T_1$; donc $28 + 42 + c = 0$ soit $c = -40$.
$C \in T_2$; donc $-4 - 6 + c = 0$ soit $c = 10$.
Ainsi : T_1 a pour équation $4x + 3y - 40 = 0$ et T_2 a pour équation $4x + 3y + 10 = 0$.

ROC Restitution organisée de connaissances

96 **1.** $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}$; donc :

$MA^2 + MB^2 = MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA} + MO^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}$

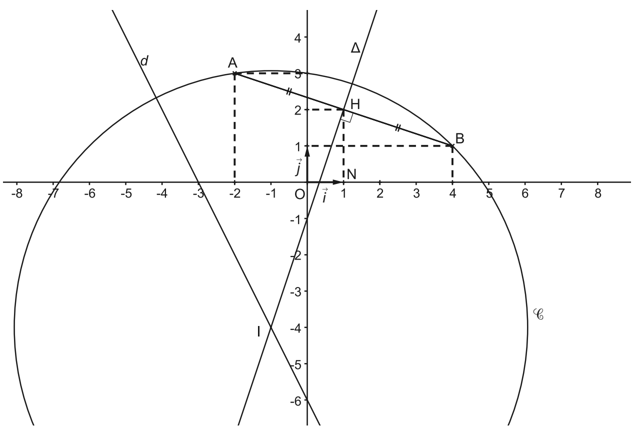
$= 2MO^2 + 2OA^2$.

Or : $OA = \frac{AB}{2}$; d'où le résultat : $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$.

2. a) Si ABCD est un parallélogramme de centre O,
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(BA^2 + BC^2)$
$= 2\left(2BO^2 + \frac{AC^2}{2}\right)$
$= 4OB^2 + AC^2$.
Or : $4OB^2 = DB^2$; d'où le résultat.

Prendre toutes les initiatives

97 Le centre I du cercle $\mathscr{C}$ est l'intersection de d et de la médiatrice Δ de [AB].



$\overrightarrow{AB}(6 ; -2)$ est un vecteur normal à Δ. Il en est de même de $\vec{u}(3 ; -1)$.

Donc Δ a une équation de la forme $3x - y + c = 0$.
Or H(1 ; 2), milieu de [AB], est un point de Δ ;
donc : $3 - 2 + c = 0$ et $c = -1$.
Δ a pour équation $3x - y - 1 = 0$.

Les coordonnées de I vérifient le système :

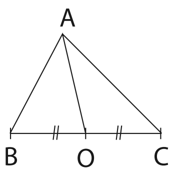
$$(S) \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 6 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}.$$

Donc I a pour coordonnées (–1 ; –4).
De plus : $IA = \sqrt{1 + 49} = 5\sqrt{2}$.
Donc $\mathscr{C}$ a pour équation $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 50$.

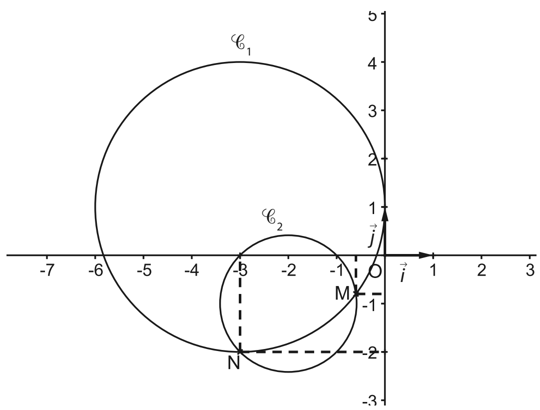
EXERCICES Approfondissement (page 000)

98 **1. a)** aire (ABC) $= \dfrac{1}{2} a^2 \sin \alpha$ et aire (ABDE) $= b^2$;
donc : $2b^2 = a^2 \sin \alpha$.
b) $b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha)$
soit $4(1 - \cos \alpha) = \sin \alpha$ **[1]**.
2. $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$ et $\sin \alpha = 2 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2}$;
donc **[1]** devient : $8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} - 2 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2} = 0$
soit $2 \sin \dfrac{\alpha}{2} \left(4 \sin \dfrac{\alpha}{2} - \cos \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$, avec $\sin \dfrac{\alpha}{2} \neq 0$;
donc : $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$.

99 $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.
Si $AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2} < 0$, alors $AO^2 < 0$
ce qui est impossible.



100 **1.**



2. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 & \textbf{[1]} \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0 & \textbf{[2]} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 2x - 4y - 2 = 0 & \textbf{[1] – [2]} \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 & \textbf{[1]} \end{cases}$

On remplace x par $2y + 1$ dans **[1]** :
$(2y + 1)^2 + y^2 + 12y + 6 - 2y + 1 = 0$ soit $5y^2 + 14y + 8 = 0$,
dont les solutions sont $y_1 = -2$ et $y_2 = -\dfrac{4}{5}$.
Donc $M\left(-\dfrac{3}{5} ; -\dfrac{4}{5}\right)$ et N(–3 ; –2).

101 **1.** $\mathscr{C} : (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$
ou $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0$ **[1]**.
$\mathscr{C}' : (x + 2)(x - 1) + (y)(y - 4) = 0$
ou $x^2 + y^2 + x - 4y - 2 = 0$ **[2]**.
2. **[1]** et **[2]** équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$

soit

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ (1 - 2y)^2 + y^2 - 12y + 6 + 6y - 7 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées : M(1 ; 0) et N(–3 ; 2).

102 **1.** Voir figure ci-après.
2. a) I(–3 ; –3), B(2 ; 7) et M(x ; y) ; $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, donc $\mathscr{C}_1$ a pour équation $(x + 3)(x - 2) + (y + 3)(y - 7) = 0$ soit $x^2 + y^2 + x - 4y - 27 = 0$.
b) Les coordonnées de M et de N sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 4y - 27 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0 \end{cases}$$

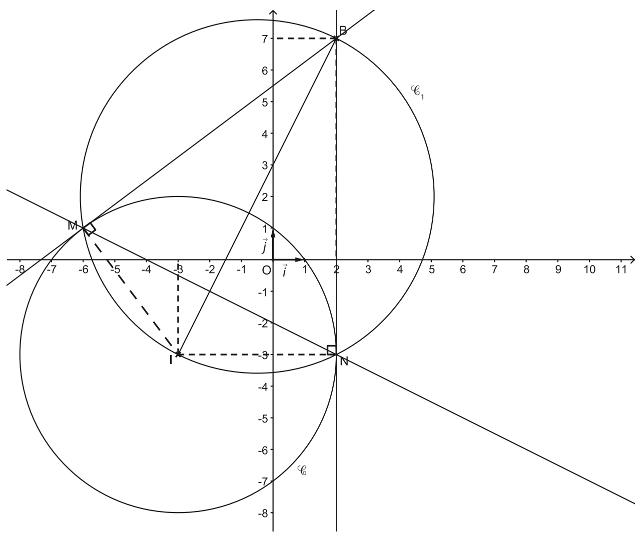
équivalent à :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ x^2 + y^2 + x - 4y - 27 = 0 \end{cases}$$

soit à :

$$\begin{cases} x = 4 - 2y \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y = -3 \text{ ou } y = 1 \end{cases}.$$

Donc M(–6 ; 2) et N(2 ; –3).



3. a) (BM) est perpendiculaire à (MI), donc (BM) est tangente à $\mathscr{C}$.
De même, (BN) est tangente à $\mathscr{C}$.
b) (BN) a pour équation $x = 2$ et (BM) a pour équation $3x - 4y + 22 = 0$.

103 **2. a)** $(x-2m)^2+(y-1)^2-4m^2-1+5=0$
soit $(x-2m)^2+(y-1)^2=4(m^2-1)$.
b) Le cercle existe et son rayon est non nul si et seulement si $m^2-1>0$, soit $m<-1$ ou $m>1$.
2. A a pour coordonnées $(2m\,;1)$. Le point A appartient donc à la droite d'équation $y=1$; mais son abscisse x_A est telle que $x_A \in [-2\,;2]$, d'où la présence des deux demi-droites.

104 **1.** $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble des points $M(x\,;4)$ tels que $MA^2+MB^2+MO^2=k$.
2. $\overrightarrow{AM}(x-6\,;y)$; $\overrightarrow{BM}(x\,;y-3)$; $\overrightarrow{OM}(x\,;4)$.
Donc : $(x-6)^2+y^2+x^2+(y-3)^2+x^2+y^2=k$
soit $3x^2+3y^2-12x-6y+45-k=0$
soit $x^2+y^2-4x-2y+15-\dfrac{k}{3}=0$
ou encore $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{k}{3}-10$.
$\mathscr{L}_k$ est un cercle de rayon non nul si et seulement si $\dfrac{k}{3}>10$ soit $k>30$.
b) Si $k<30$, l'ensemble $\mathscr{L}_k$ est vide.
c) $\mathscr{L}_{42}$ a pour équation $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.
C'est le cercle de centre $I(2\,;1)$ et de rayon 2.

105 **1.** $\cos^2 a=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ et $\cos a>0$; donc : $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin^2 b+\cos^2 b=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}=1.$$

2. a)
$$\cos(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\sin(a+b)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
b) $a+b=\dfrac{\pi}{4}$. Or $a=\dfrac{\pi}{6}$, donc $b=\dfrac{\pi}{12}$.

106 **1.**
$$(\cos a+\sin a)^2=\cos^2 a+\sin^2 a+2\sin a\cos a$$
$$=1+\sin 2a.$$
$(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$.

2.
$$\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{(\cos a+\sin a)^2}{(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$$

3.
$$\frac{\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}.$$

107 **1.** Dans le triangle ABC :
$$\widehat{BAC}=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{12}\text{ et }\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin\frac{5\pi}{12}}$$
$$\text{soit } AB=\frac{10\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{5\pi}{12}}.$$
Or $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
$$\text{Donc : } AB=\frac{20}{\sqrt{3}+1}=\frac{20(\sqrt{3}-1)}{2}=10(\sqrt{3}-1).$$
2. $OA=AB\sin\alpha=10(\sqrt{3}-1)\dfrac{1}{2}=5(\sqrt{3}-1)$.
$$\text{aire (ABC)}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=50(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}}{2}=25(3-\sqrt{3}).$$

108 **1.** $\cos\beta=\dfrac{16+25-36}{40}=\dfrac{1}{8}$.
$\cos\alpha=\dfrac{25+36-16}{60}=\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}$;
donc : $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{9}{8}-1=\dfrac{1}{8}$.
D'où le résultat : $\cos\beta=\cos 2\alpha$.
2. $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$; donc $\alpha\approx 41°$
$\cos\beta=\dfrac{1}{8}$; donc $\beta\approx 82°$.
3. $\text{aire(ABC)}=\dfrac{1}{2}AC\times CB\times\sin\beta$.
Or $\sin^2\beta=1-\dfrac{1}{64}=\dfrac{64}{64}=\dfrac{9\times 7}{8^2}$ avec $\sin\beta>0$;
donc $\sin\beta=\dfrac{3}{8}\sqrt{7}$.
Donc : $\text{aire (ABC)}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{3}{8}\sqrt{7}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

109 **1.**

```
VARIABLES
   a EST_DU_TYPE NOMBRE
   b EST_DU_TYPE NOMBRE
   c EST_DU_TYPE NOMBRE
   x EST_DU_TYPE NOMBRE
   cos_alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
   xd EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE a
   LIRE b
   LIRE c
   cos_alpha PREND_LA_VALEUR
   (pow(b,2)+pow(c,2)-pow(a,2))/(2*b*c)
   x PREND_LA_VALEUR 0
   TANT_QUE (cos(x) >=cos_alpha et x<= Math.
   PI) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      x PREND_LA_VALEUR x + 0.01
      FIN_TANT_QUE
   AFFICHER «à 0,01 rad près, alpha =»
   AFFICHER x
   xd PREND_LA_VALEUR round(x*180/Math.PI)
   AFFICHER «à 1 degré près, alpha =»
   AFFICHER xd
FIN-ALGORITHME
```

2. $\widehat{A}\approx 0{,}67$ rad soit 38°, $\widehat{B}=1{,}05$ rad soit 60° et $\widehat{C}=1{,}43$ rad soit 82°.

110 **1. a)** $c^2+a^2=2BI^2+\dfrac{b^2}{2}$.
Donc $BI^2=\dfrac{1}{2}\left(c^2+a^2-\dfrac{b^2}{2}\right)$.
b) $CJ^2=\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2-\dfrac{c^2}{2}\right)$.

c) $BG = \dfrac{2}{3}BI$ et $CG = \dfrac{2}{3}CJ$;

donc : $BG^2 = \dfrac{2}{9}\left(c^2 + a^2 - \dfrac{b^2}{2}\right)$ et $CG^2 = \dfrac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}\right)$.

2. $(BI) \perp (CJ) \Leftrightarrow BC^2 = BG^2 + GC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}a^2 = c^2 + b^2 + 2a^2 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2.$$

Prendre toutes les initiatives

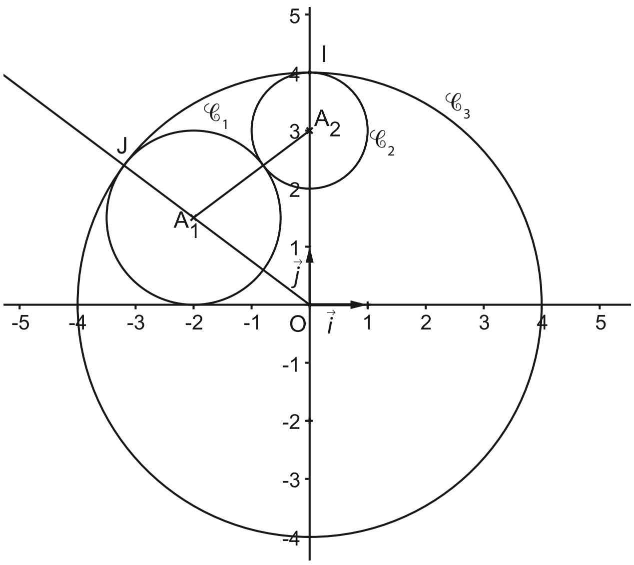
111 **1.** $\mathscr{C}_1$ a pour centre $A_1\left(-2\,;\dfrac{3}{2}\right)$ et pour rayon $r_1 = \dfrac{3}{2}$.

$\mathscr{C}_2$ a pour centre $A_2(0\,;3)$ et pour rayon $r_2 = 1$.

$A_1A_2 = \sqrt{2^2 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2}$.

Or $r_2 + r_1 = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

La distance des centres étant égale à la somme des rayons, les cercles sont tangents extérieurement.



2. (A_1O) recoupe $\mathscr{C}_1$ en J.

$A_1O = \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2}$, donc $OJ = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = 4$.

Notons $r_3 = 4$ le rayon de $\mathscr{C}_3$; $J \in \mathscr{C}_3$ et O, A_1, J alignés, donc les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ sont tangents « intérieurement ».

De même, $I(0\,;4)$ est un point de $\mathscr{C}_2$ et de $\mathscr{C}_3$, O, A_2, I alignés et $OA_2 = r_3 - r_2$; donc les cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont tangents « intérieurement ».

112 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

M a pour coordonnées $(2\cos\theta\,;0)$ et $N(0\,;2\sin\theta)$;

$MN = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = 2$.

Le milieu I de [MN] a pour coordonnées $(\cos\theta\,;\sin\theta)$; donc : $OI^2 = 1$ et $OI = 1$.

I appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Mais $\theta \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc : $0 < \cos\theta < 1$ et $0 < \sin\theta < 1$.

Le point I décrit donc un quart de cercle privé de $A(1\,;0)$ et $B(0\,;1)$.

113 AB = 30 m ; AC = 70 m ; BC = 80 m.

$\cos\widehat{A} = \dfrac{900 + 4\,900 - 6\,400}{2 \times 30 \times 70} = \dfrac{-600}{2 \times 30 \times 70} = -\dfrac{1}{7}$;

donc $\sin^2\widehat{A} = 1 - \dfrac{1}{49} = \dfrac{48}{49}$.

Or $\sin\widehat{A} > 0$; donc : $\sin\widehat{A} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\text{Aire}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2} \times 30 \times 70 \times \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

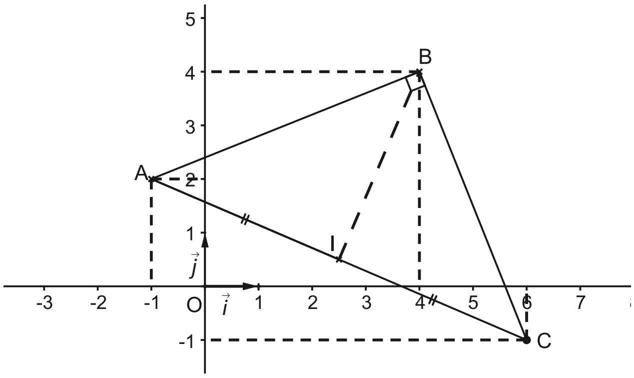
soit aire(ABC) $= 600\sqrt{3}$ m².

EXERCICES Travail en autonomie (page 264)

A $\overrightarrow{AB}(5\,;2)$, $\overrightarrow{AC}(7\,;-3)$ et $\overrightarrow{BC}(2\,;-5)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $AB = BC = \sqrt{29}$.

Le triangle ABC est donc rectangle isocèle.



Le cercle $\mathscr{C}$ est donc centré en $I\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$, milieu de [AC], et le rayon est $\dfrac{1}{2}\sqrt{49 + 9} = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$.

Donc $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 5x - y - 8 = 0$.

B **1.** La médiatrice Δ de [AB] passe par le milieu $K(2\,;4)$ de [AB] et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ ou $\vec{u}(2\,;1)$.

Donc Δ a pour équation $2x + y - 8 = 0$.

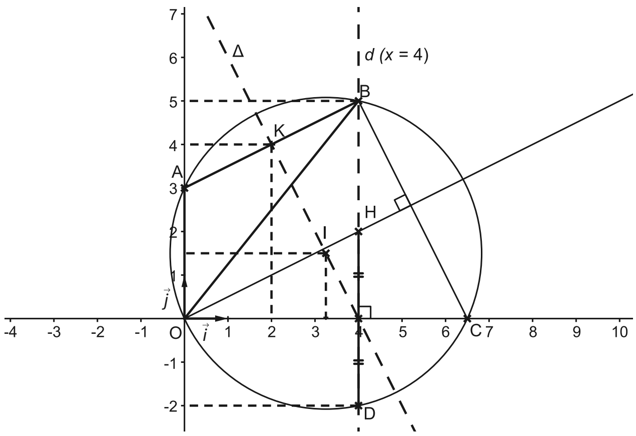
De plus, I a pour ordonnée $\dfrac{3}{2}$, donc son abscisse est $\dfrac{13}{4}$.

Ainsi, le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - \dfrac{13}{2}x - 3y = 0$.

2. a) Si $x = 4$, $y^2 - 3y - 10 = 0$, soit $y = 5$ ou $y = -2$.

Donc : $D(4\,;-2)$.

b) $y = 0$, donc $x^2 - \dfrac{13}{2}x = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \dfrac{13}{2}$.
Donc $C\left(\dfrac{13}{2}\,;\,0\right)$.



3. H a pour coordonnées $(4\,;\,2)$.
$\overrightarrow{OH}(4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{BC}\left(\dfrac{5}{2}\,;\,-5\right)$; $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.
Donc (OH) est perpendiculaire à (BC) et (BH) est perpendiculaire à (OC), donc H est l'orthocentre du triangle OBC.

C **1.** $\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}$; donc $\sin\dfrac{3\pi}{10} = \cos\dfrac{\pi}{5}$.

2. $\sin\dfrac{7\pi}{10} = \sin\left(\pi - \dfrac{3\pi}{10}\right) = \sin\dfrac{3\pi}{10}$;

$\sin\dfrac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{\pi}{5}$.

Donc : $\sin^2\dfrac{\pi}{5} + \sin^2\dfrac{3\pi}{10} + \sin^2\dfrac{7\pi}{10} + \sin^2\dfrac{4\pi}{5}$
$= \sin^2\dfrac{\pi}{5} + \cos^2\dfrac{\pi}{5} + \cos^2\dfrac{\pi}{5} + \sin^2\dfrac{\pi}{5} = 2$.

3. $\cos\dfrac{3\pi}{10} = \sin\dfrac{\pi}{5}$; $\cos\dfrac{7\pi}{10} = -\cos\dfrac{3\pi}{10}$; $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{5}$.

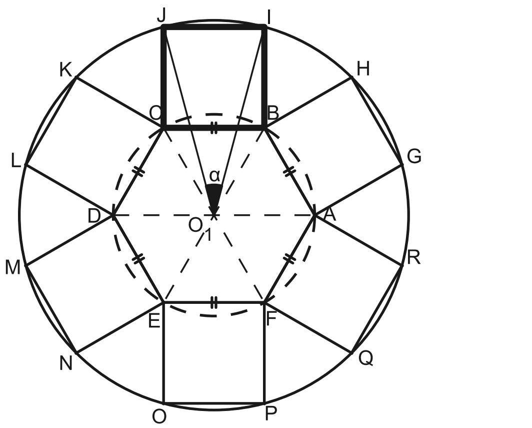
Donc : $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{10} + \cos\dfrac{7\pi}{10} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$
$= \cos\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{5} - \sin\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{\pi}{5} = 0$.

D $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 110°$
$= 9 - 4 - 12\cos 110° = 13 - 12\cos 110°$
soit $AC \approx 4{,}1$ milles.

E **1.** $OI^2 = OA^2 + AI^2 - 2 \times OA \times AI \times \cos\widehat{OAI}$.
Or : $OA = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $AI = a$ et $\widehat{OAI} = 120°$.
Donc : $OI^2 = \dfrac{a^2}{3} + a^2 - 2 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} \times -\dfrac{1}{2} = \dfrac{4a^2}{3} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$;
d'où : $OI = a\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}}$.

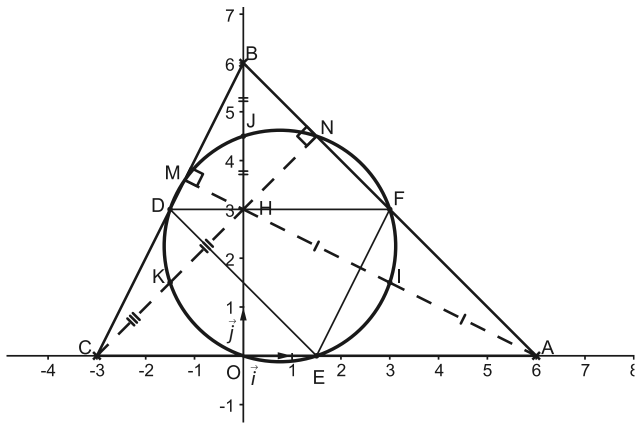
2. (OB), (OC), (OA) sont trois axes de symétrie ;
donc OI = OD = OE = OF = OG = OH.
D'où le résultat.
Le centre du cercle est O et le rayon OI.

3. Dans ce cas : $O_1I^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 150°$
$= 2a^2 + 2a^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a^2 + a^2\sqrt{3}$;
d'où : $O_1I = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.



Les points sont situés sur le cercle de centre O_1 et de rayon O_1I.
Les côtés IJ, JK, KL, etc. sont égaux.
$\widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \ldots = 30°$.
Donc GHIJKLMNOPQR est un polygone régulier à 12 côtés.

F **1.** $D\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,3\right)$, $F(3\,;\,3)$ et $E\left(\dfrac{3}{2}\,;\,0\right)$.
Dans l'équation de $\mathscr{C}$, on remplace x et y successivement par les coordonnées de D, de F, de E :
– pour F : $9 + 9 - \dfrac{9}{2} - \dfrac{7}{2} = 0$, donc $F \in \mathscr{C}$.
On montre de même que : $D \in \mathscr{C}$ et $E \in \mathscr{C}$.



2. $H(0\,;\,y)$; $\overrightarrow{AH}(-6\,;\,y)$ et $\overrightarrow{BC}(-3\,;\,-6)$.
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, donc $18 - 6y = 0$, soit $y = 3$,
et H a pour coordonnées $(0\,;\,3)$.
Donc : $I\left(3\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$, $J\left(0\,;\,\dfrac{9}{2}\right)$ et $K\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.
On vérifie aisément que I, J, K sont des points de $\mathscr{C}$.
La droite (BC) a pour équation $2x - y + 6 = 0$ et (AB) a pour équation $x + y - 6 = 0$.
(CH) a pour équation $x - y + 3 = 0$ et (AH) a pour équation $x + 2y - 6 = 0$.
Le point M, intersection des droites (BC) et (AH), a pour coordonnées $\left(-\dfrac{6}{5}\,;\,\dfrac{18}{5}\right)$.
Le point N, intersection des droites (CH) et (AB), a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\right)$.
On vérifie alors aisément que M et N sont des points de $\mathscr{C}$.