

1. Questions de cours (3 points) :

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

1.1. Citer la règle du signe de ce trinôme.

1.2 On donne sa forme canonique $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$. En déduire la condition pour que $P(x)$ ait une racine unique ; écrire alors la forme factorisée de $P(x)$ et donner cette racine.

Exercice 2 (6 points) :

Soit les trinômes : $A(x) = -2x^2 + 8x + 42$; $B(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2}$; $C(x) = -x^2 + 2x - 3$

2.1. Calculer leurs racines si elles existent.

2.2. Factoriser ces trinômes si possible.

2.3. En dresser les tableaux de signes.

Exercice 3 (3 points) :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$.

3.1. Vérifier que 1 est une racine de P.

3.2. En déduire une factorisation de P.

3.3. Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 4 (2 points) :

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (E) : $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 9} \leq 0$

Exercice 5 (3 points) :

Soit m un nombre réel non nul et le trinôme $f(x) = m \cdot x^2 + 4x + 2(m - 1)$

4.1. Pour quelle valeur de m ce trinôme a-t-il une seule racine ?

4.2. Pour quelle valeur de m ce trinôme a-t-il deux racines ?

4.3. Quel est l'ensemble des réels m tels que $f(x) < 0$ pour tout x ?

Exercice 6 (3 points) :

Soit les fonctions données par : $f(x) = \frac{8}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ($x \neq 1, x \neq 2$)

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g , représentatives des fonctions f et g et étudier leur position relative.

1. Questions de cours (3 points) :

1.1. Le trinôme est toujours du signe de a sauf quand x est entre les éventuelles racines.

1.2. $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ donc $P(x)$ a une racine unique $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ssi le second membre est nul

soit $b^2 - 4ac = 0$ (car 0 est le seul réel ayant une racine carrée unique) ; alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Exercice 2 (6 points) :

On applique les formules : $\Delta = b^2 - 4ac$; $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; d'où :

2.1. $\Delta_A = 400$, $x'_A = -3$, $x''_A = 7$; $\Delta_B = 0$, $x'_B = x''_B = \sqrt{2}$; $\Delta_C = -8 < 0$: pas de racines

2.2. $A(x) = -2(x+3)(x-7)$; $B(x) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2$; Pas de factorisation

2.3.

x	$-\infty$	-3	7	$+\infty$		
A(x)		-	0	+	0	-

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
B(x)		+	0	+

x	$-\infty$	$+\infty$
C(x)		-

Exercice 3 (3 points) :

3.1. $P(1) = 2 - 3 - 4 + 6 = 8 - 8 = 0$ donc 1 est racine de $P(x)$ donc :

3.2. $P(x) = (x-1)(2x^2 + bx - c) = 2x^3 + (b-2)x^2 - (b+c)x + c$ et par identification : $\begin{cases} b-2 = -3 \\ b+c = 5 \\ c = 6 \end{cases}$

soit $b = -1$, $c = 6$ et $P(x) = (x-1)(2x^2 - x - 6)$

3.3. Or $x^2 - x - 6 = (2x+3)(x-2)$ donc les racines de P sont **-1.5, 1 et 2**

Exercice 4 (2 points) :

$$(E) : R(x) = \frac{x(x-5)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

Racines : -3, 0, 3, 5 d'où le tableau
et $S =]-3 ; 0] \cup]3 ; 5]$

x	$-\infty$	-3	0	3	5	$+\infty$				
$x^2 - 5x$		+	+	0	-	-	0	+		
$x^2 - 9$		+	0	-	-	0	+	+		
R(x)		+		-	0	+		-	0	+

Exercice 5 (3 points) :

$$\Delta = 4^2 - 4m \times 2(m-1) = 16 + 8m - 8m^2 = -8(m+1)(m-2)$$

Tableau de signe de Δ :

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
Δ		-	0	+	0	-

4.1. f a une seule racine ssi $\Delta = 0$ ssi $m = -1$ ou $m = 2$

4.2. f a deux racines ssi $\Delta > 0$ ssi $m \in]-1 ; 2[$

4.3. $f(x) < 0$ pour tout x ssi $m < 0$ et $\Delta < 0$ ssi $m \in]-\infty ; -1[$

Exercice 6 (3 points) :

$$d(x) = f(x) - g(x) = \frac{8}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{-x^2 + 8x - 15}{(x-1)(x-2)} = \frac{-(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-2)} = \frac{N(x)}{D(x)} ; C_f \text{ coupe } C_g \text{ pour :}$$

$d(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 5$ donc $C_f \cap C_g = (3 ; 4)$ et $(5 ; 2)$

Pour la position relative de C_f et C_g on étudie le signe de $d(x)$:

$d(x) > 0$ soit C_f au dessus de $C_g \Leftrightarrow x \in]1 ; 2[\cup]3 ; 5[$.

$d(x) < 0$ soit C_f en dessous de $C_g \Leftrightarrow$

$$x \in]-\infty ; 1[\cup]2 ; 3[\cup]5 ; +\infty[$$

x		1		2		3		5	
N(x)	-		-		-	0	+	0	-
D(x)	+	0	-	0	+		+		+
d(x)	-		+		-	0	+	0	-