1S 1h	MATHEMATIQUES	14 Fév 2014 DS 5

NOM :

1. Questions de Cours (10 points)

a. Remplir les tableaux suivants :

(u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, $v \neq 0$ sur I).

f(x)	Dérivée f '(x)	Validité
x^n		$n \in \mathbb{N}$, $x \in$
$\frac{1}{x}$		$x \in$
$\sqrt{x}$		$x \in$

f	Dérivée f '
$u \times v$	
$\frac{1}{v}$	
$\frac{u}{v}$	

b. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in$ I.

Ecrire une équation de la tangente en A(a ; f(a)) à la courbe de f.

Démontrer ce résultat.

Soit C la parabole d'équation $y = 3x^2 - 2x + 7$.

Déterminer une équation de la tangente à C en son point d'abscisse 1.

c. Calculer les dérivées sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions données par :

$f(x) = x^5 - 3\sqrt{x}$ $\quad g(x) = (5x^2 - 9)^4$ $\quad h(x) = 6x\sqrt{x}$

$j(x) = 4x^3 - 7x^2 + \frac{5}{x}$ $\quad k(x) = \frac{3}{(x^2 + 5)}$ $\quad l(x) = \frac{3x^2 - 7}{4x + 9}$

(ne pas oublier de simplifier le résultat).

2. Problème (10 points) d'après les ex 45-46-53-55-58

Soit les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

et leurs courbes F, G, H dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a. Soit A (2 ; 2) et B le point de F d'abscisse 0.

Déterminer le point C de F où la tangente est parallèle à (AB).

b. Déterminer les équations des tangentes à F passant par l'origine.

c. Déterminer le point A de F où la tangente T à F en A a pour coefficient directeur 1. En déduire l'équation réduite de T.

Prouver que F est au dessus de T.

d. Soit M le point de F d'abscisse a.

Déterminer a pour que la tangente à F en M passe par le point D (3 ; -5)

En déduire l' équation réduite de la (ou des) tangente.

e. Résoudre l'équation g'(a) = 0.25.

En déduire l'équation réduite de la tangente à G en son point d'abscisse a.

f. On cherche un réel α tel que les tangentes à F et à H en leur point d'abscisse α soient parallèles.

Prouver que α est solution de l'équation : $(\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$.

Calculer α pour en déduire les équations de ces tangentes.

Olivier de MUIZON @ JJ

1S 1h	# MATHEMATIQUES	14 Fév 2014 DS 5co

NOM :

1. Cours (569) = 20

a.

f(x)	Dérivée f '(x)	Validité
x^n	$n.x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}^{*+}$

f	Dérivée f '
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

b. T : y = mx + p avec m = f '(a) et $A \in T$ soit f(a) = a.f '(a) + p
d'où p = f(a) – a.f '(a) et **T : y = f '(a)(x – a) + f(a)**
f '(x) = 6x – 2 ; f '(1) = 4 ; f(1) = 8 d'où T : **y = 4x + 4**

c. $\mathbf{f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\quad$ $\mathbf{g'(x) = 40x(5x^2 - 9)^3}$ $\quad$ $\mathbf{h'(x) = 9\sqrt{x}}$

$\mathbf{j'(x) = 12x^2 - 14x - \frac{5}{x^2}}$ $\quad$ $\mathbf{k'(x) = \frac{-6x}{(x^2-5)^2}}$ $\quad$ $\mathbf{l'(x) = \frac{12x^2 + 54x + 28}{(4x+9)^2}}$

2. Problème (333335) = 20

a. B(0 ; 4) ; on cherche c tel que f '(c) = (4 – 2)/(0 – 2) = -1
or f '(x) = 2x – 3 donc 2c – 3 = -1 et c = 1 d'où **C(1 ; 2).**

b. $0 = f'(a) \times (0 - a) + f(a) \Leftrightarrow f(a) = a.f'(a)$
$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 4 = a(2a - 3) \Leftrightarrow a^2 = 4$ et $\mathbf{a = \pm 2}$
f '(2) = 1, f '(-2) = -7 ; d'où 2 tangentes d'équations : **y = x et y = –7x**

c. f '(a) = 2a – 3 = 1 $\Leftrightarrow$ a = 2 d'où **A(2 ; 2)** et T : **y = x.**
$\mathbf{f(x) - x} = x^2 - 4x + 4 = \mathbf{(x-2)^2} \geq 0$ $(\forall x)$ donc <u>C est au dessus de T</u>.

d. D(3 ; -5) donc $-5 = f'(a).(3 - a) + f(a) \Leftrightarrow a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow$ **a = 0** ou **a = 6**.
D'où 2 tangentes d'équations : **y = 4 – 3x** et **y = 9x – 32**.

e. $g'(a) = 0.25 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$ donc **a = 4** ; et la tangente à G en (a ; g(a))
a pour équation : y = 0.25(x – 4) + 2 = 0.25x + 1

f. $\mathbf{f'(\alpha) = h'(\alpha)} \Leftrightarrow 2\alpha - 3 = -1/\alpha^2 \Leftrightarrow \mathbf{2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0}$ (car $\alpha \neq 0$)
or en développant : $\mathbf{(\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1)} = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = (\alpha - 1)^2(2\alpha + 1) = 0$
d'où $\mathbf{\alpha = 1}$, $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -1$, $f(\alpha) = 2$, $g(\alpha) = 1$; **y = 3 – x et y = 2 – x** ou
$\mathbf{\alpha = -0.5}$, $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -4$, $f(\alpha) = 5.75$, $g(\alpha) = -2$; **y = 3.75 –4x et y = -4x –4**

Olivier de MUIZON @ JJ