

NOM : Barème possible : 43634+333346

1. Questions de Cours (20 points)

- a. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Ecrire en la justifiant une équation de la tangente en $A(a ; f(a))$ à la courbe de f .
- b. Calculer le nombre dérivé en $a = 2$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
- c. Remplir le tableau suivant dans lequel a, b, c, m, p sont des constantes.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Validité
p		
x		
$mx + p$		
x^2		
$ax^2 + bx + c$		
x^n		
$\frac{1}{x}$		
\sqrt{x}		

- d. Calculer les dérivées sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions données par :
 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1 ; g(x) = 3x - 9 + \sqrt{x} ; h(x) = 3x^3 - 7x + \frac{5}{x}$.
- e. Soit C la parabole d'équation $y = 4x^2 - 7x + 9$.
 Déterminer une équation de la tangente à C en son point d'abscisse 1.

2. Problème (20 points) d'après les ex 45-58-45-46-53-62

Soit les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 3x + 5, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = \frac{1}{x}$.
 et leurs courbes F, G, H dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- a. Soit $A(2 ; 3)$ et B le point de F d'abscisse 0.
 Déterminer le point C de F où la tangente est parallèle à (AB) .
- b. Déterminer les équations des tangentes à F passant par l'origine.
- c. Déterminer le point A de F où la tangente T a pour coefficient directeur 1.
 Donner une équation de T .
 Prouver que F est au dessus de T .
- d. Résoudre l'équation $g'(a) = 0.125$.
 En déduire que la droite d'équation $y = 0.125x + 2$ est tangente à G .
- e. On cherche un réel α tel que les tangentes à F et à H en leur point d'abscisse α soient parallèles.
 Prouver que a est solution de l'équation : $(\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$.
 En déduire les équations de ces tangentes.
- f. Soit a et b sont deux réels et K la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x - 7$.
 T_a est la tangente à F en son point d'abscisse a .
 T_b est la tangente à K en son point d'abscisse b .
- f.1. Ecrire les équations réduites de T_a et de T_b (en fonction de a ou de b).
- f.2. En déduire qu'une droite T est tangente commune à F et à K si et seulement si a et b sont solutions du système : $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 + b^2 = 12 \end{cases}$
- f.3. Calculer a et b pour trouver l'équation réduite d'une tangente commune.

NOM :

1. Cours (43634) = 20

a. $T : y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ et $A \in T$ soit $f(a) = a.f'(a) + p$
d'où $p = f(a) - a.f'(a)$ et **$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$**

b. $T_f(a,h) = \left(\frac{1}{1-a-h} - \frac{1}{1-a} \right) \frac{1}{h} = \frac{1}{(1-a-h)(1-a)}$ d'où $f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$ et **$f'(2) = 1$** .

c.

Fonction f(x)	Dérivée f'(x)	Validité
p	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
mx + p	m	$x \in \mathbb{R}$
x^2	2x	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	2ax + b	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$n.x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \in]-\infty ; 0[$ ou $x \in]0 ; +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0 ; +\infty[$

d. **$f'(x) = 4x^3 - 2x + 1$; $g'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $h(x) = 9x^2 - 7 - \frac{5}{x^2}$**

e. **$f'(x) = 8x - 7$; $f'(1) = 1$; $f(1) = 6$ d'où $T : y = x + 5$**

2. Problème (333346) = 21

a. $B(0 ; 5)$; on cherche c tel que $f'(c) = (5 - 3)/(0 - 2) = -1$
or $f'(x) = 2x - 3$ donc $2c - 3 = -1$ et $c = 1$ d'où **$C(1 ; 3)$** .

b. On cherche a tel que $f'(a) = f(a) - 0 / a - 0$ soit $f(a) = a.f'(a)$
 $a^2 - 3a + 5 = a(2a - 3) \Leftrightarrow a^2 = 5$ et **$a = \pm\sqrt{5}$**
d'où 2 tangentes d'équations : **$y = (2\sqrt{5} - 3)x$ et $y = -(2\sqrt{5} + 3)x$**

c. $f'(a) = 2a - 3 = 1 \Leftrightarrow a = 2$ d'où **$A(2 ; 3)$** et **$T : y = x + 1$** .
 $f(x) - (x + 1) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ ($\forall x$) donc C est au dessus de T.

d. $g'(a) = 0.125 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 4$ donc **$a = 16$** ; et la tangente à G en (a ; g(a))
a pour équation : **$y = 0.125(x - 16) + 4 = 0.125x + 2$**

e. **$f'(\alpha) = h'(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha - 3 = -1/\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0$** (car $\alpha \neq 0$)
or en développant : $(\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = (\alpha - 1)^2(2\alpha + 1) = 0$
d'où $\alpha = 1$, $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -1$, $f(\alpha) = 3$, $g(\alpha) = 1$; **$y = 4 - x$ et $y = 2 - x$**
 $\alpha = -0.5$, $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -4$, $f(\alpha) = 6.75$, $g(\alpha) = -2$; **$y = 4.75 - 4x$ et $y = -4x - 4$**

f.

f.1. $T_a : y = (2a - 3)x - a^2 + 5$ et $T_b : y = (5 - 2b)x + b^2 - 7$

f.2. 2 droites sont confondues ssi elles ont même coefdir et même ordorig.

$$T = T_a = T_b \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3 = 5 - 2b \\ 5 - a^2 = b^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 + b^2 = 12 \end{cases}$$

f.3. d'où $(a + b)^2 = 16$ donc $ab = 2$ et a et b sont solutions de $X^2 - 4X + 2 = 0$
soit $\{a ; b\} = \{2 - \sqrt{2} ; 2 + \sqrt{2}\}$ d'où 2 tangentes communes d'équations :
 $y = (1 + 2\sqrt{2})x - 1 - 4\sqrt{2}$ et $y = (1 - 2\sqrt{2})x - 1 + 4\sqrt{2}$