1S 1h	MATHEMATIQUES	7 Jan 2013 DS 4

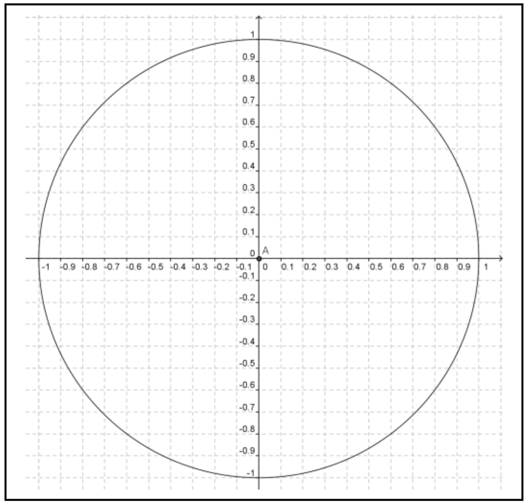
NOM :

Barème possible : 5+6+9

1. Cours

a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, prouver que : $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (-\vec{u}\ ;\ -\vec{v})$

b. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, placer, en laissant apparent les traits de construction utiles, les points M, N, P, Q, repérés respectivement par : $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{64\pi}{3}$.



c. Compléter le tableau :

Angle x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos(x)			
sin(x)			

d. Exprimer en fonction de cos(x) ou de sin(x) :

$\cos(\pi + x) =$

$\sin(\pi - x) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

2. Calculs trigonométriques

a. Donner la valeur exacte de :

$$S = \cos(\pi - x) + \sin(\pi - x) - \cos(\pi + x) + \sin(\pi + x) - \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

b. Soit l'équation : $\cos(x) = 0.4$ avec $x \in [-\pi/2\ ;\ 0]$.
Placer sur le cercle de la question **1.b.** le point R associé à x.
Calculer la valeur exacte de sin(x).

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation : $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3. Problème

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé direct,
Γ est le cercle trigonométrique de centre O,
On donne les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a. Faire une figure.

b. Démontrer que A et B appartiennent à Γ.

c. Déterminer la mesure principale (dans $]-\pi\ ;\ \pi]$) de $(\vec{i}; \overrightarrow{OA})$ et de $(\vec{i}; \overrightarrow{OB})$.

d. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$
et les mesures en radian de $\widehat{AOB}$ et de $\widehat{OAB}$.

e. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AB})$

f. Démontrer que $(\vec{i}; \overrightarrow{AB}) = (\vec{i}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + \pi$.
en déduire les mesures principales de $(\vec{i}; \overrightarrow{AB})$ et de $(\vec{j}; \overrightarrow{AB})$.

Olivier de MUIZON @ JJ

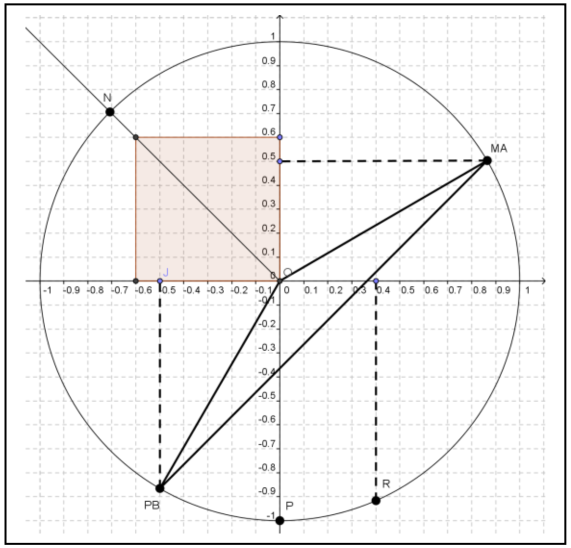
1S 1h	MATHEMATIQUES	7 Jan 2013 DS 4

Barème possible : 5+6+9

1. Cours = 1+1.5+1.5+1

a. $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = (\vec{u}\,;-\vec{u}) + (-\vec{u}\,;-\vec{v}) + (-\vec{v}\,;\vec{v}) + k.2\pi = (-\vec{u}\,;-\vec{v}) + 2\pi + k.2\pi$
$= (-\vec{u}\,;-\vec{v}) + (k+1).2\pi$

b. M : $\sin(\pi/6) = 0.5$
N est sur la bissectrice du 2^e cadran
P(0 ; -1)
Q : $\cos(64\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -0.5$



c. Compléter le tableau :

Angle x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos(x)	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**0**	$-\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
sin(x)	$-\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**–1**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$

d. Exprimer en fonction de cos(x) ou de sin(x) :

$\cos(\pi + x) = \mathbf{-\cos(x)}$
$\sin(\pi - x) = \mathbf{\sin(x)}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \mathbf{-\sin(x)}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathbf{\cos(x)}$

2. Calculs trigonométriques = 2+2+2

a. $\mathbf{S} = -\cos(x) + \sin(x) + \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) \mathbf{= 0}$

b. $\cos(x) = 0.4$ et $\sin(x) < 0$ d'où **R** et $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
donc $\sin^2(x) = 0.84$ or $x \in [-\pi/2\,;\,0]$ donc $\mathbf{\sin(x) = -\sqrt{0.84}}$

c. dans $\mathbb{R}$, $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\mathbf{x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi}$ **ou** $\mathbf{x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi}$ et dans $]-\pi\,;\,\pi]$, $\mathbf{S = \{-\frac{11\pi}{12}\,;\,\frac{5\pi}{12}\}}$

3. Problème = 1+1+1+2+2+2

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a. Figure.

b. $OA^2 = (\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 = 1 = OB^2$ donc <u>A et B appartiennent à Γ.</u>

c. $\cos(\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) = 1/2$ donc $\mathbf{(\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) = \pi/6}$
$\cos(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}) = -1/2$ et $\sin(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}) = -\sqrt{3}/2$ donc $\mathbf{(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}) = -2\pi/3}$

d. $\mathbf{(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})} = (\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}) - (\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) = \mathbf{-5\pi/6}$; d'où $\mathbf{\widehat{AOB}} = |(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})| = \mathbf{5\pi/6}$
de plus (AOB) est isocèle en O donc $\mathbf{\widehat{OAB}} = (\pi - \widehat{AOB})/2 = \mathbf{\pi/12}$

e. $(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AB})$
$= 3\pi - 5\pi/6 + (\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BA}) = \pi/6 - (\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB})$
car $(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AO}) = -(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB})$ car (AOB) est isocèle en O.
donc $2(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB}) \mathbf{= \pi/6}$ d'où $(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB}) \mathbf{= \pi/12}$

f. $(\vec{i}\,;\overrightarrow{AB}) = (\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB}) = (\vec{i}\,;\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AB}) + \pi.$
donc $\mathbf{(\vec{i}\,;\overrightarrow{AB})} = \pi/6 + \pi/12 + \pi = 5\pi/4 = \mathbf{-3\pi/4}$
et $\mathbf{(\vec{j}\,;\overrightarrow{AB})} = (\vec{i}\,;\overrightarrow{AB}) - (\vec{i}\,;\vec{j}) = 5\pi/4 - \pi/2 = \mathbf{3\pi/4}$

Olivier de MUIZON @ JJ