Dérivée 1S

1. Dérivée et tangente (I est un intervalle de $\mathbb{R}$)

Rappel : Une droite d, non verticale, a une équation réduite : $y = mx + p$.
m est le coefficient directeur (la pente) de d.

T1 : Soit A et B deux points de d, alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

T2 : Le signe de m donne les variations de la fonction affine $x \longmapsto mx + p$.

D1 : Soit f définie sur I, a et $h \neq 0$ tels que $a \in I$ et $a+h \in I$.
le taux de variation de f entre a et a+h est : $T_f(a,h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
C'est le coefficient directeur de la droite A(a,f(a)) M(a+h,f(a+h))
ex : si $f(x) = x^2$, $T_f(1,h) = 2 + h$ et si $h \to 0$ alors $T_f(1,h) \to 2$

Rq : Si h devient proche de zéro, M se rapproche de A et, à la limite, la droite (AM) devient "tangente" à la courbe de f en A

D2 : Soit f définie sur I, a et $h \neq 0$ tels que $a \in I$ et $a+h \in I$.
S'il existe un réel L tel que $T_f(a,h) \to L$ si $h \to 0$ alors on dit que f est dérivable en a et que sa dérivée en a est $L = f'(a)$.
Notation : $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

ex : $f(x) = 3x^2 + 5x - 9$; $T_f(a,h) = 6a + 5 + 3h \to 6a + 5$ (si $h \to 0$)

D3 : Soit f définie sur I, C_f sa courbe, $a \in I$ et A(a ; f(a)) ;
si f est dérivable en a, on appellera tangente à C_f en A la droite passant par A, de coefficient directeur f '(a).

T3 : Soit f définie sur I, C_f sa courbe, $a \in I$ et A(a ; f(a)) ;
si f est dérivable en a, la tangente à C_f en A a pour équation :
$\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Ex réso A : ex 1-2-18-20-26-27-30-31-35-42-43-44

Ex réso B : ex 4-6-45-46-48-51-52-53-55-58-59-62-63-D

2. Calcul des dérivées

D4 : Si une fonction f définie sur I est dérivable en tout $x \in I$,
on définit alors sur I la fonction dérivée de f par $f' : x \longmapsto f'(x)$

T4 : Les fonctions affines $f : x \longmapsto mx + p$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$.

T5 : Les trinômes $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ sont dériv sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2ax + b$.

T6 : $\forall n \in \mathbb{N}$, les puissances $f : x \longmapsto x^n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n.x^{n-1}$.

T7 : La fonction inverse $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur chaque intervalle
$]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

T8 : La fonctions racine $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

T9 : $\forall n \in \mathbb{N}$, les puissances $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ sont dérivables sur chaque intervalle
$]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$. (Rq : $f(x) = x^{-n}$ et $f'(x) = -n.x^{-n-1}$)

Fonction f(x)	Dérivée f '(x)	Validité
$mx + p$	m	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$x \in]-\infty ; 0[$ $x \in]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0 ; +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ ou x^{-n}	$\dfrac{n}{x^{n+1}}$ ou $-nx^{-n-1}$	$x \in]-\infty ; 0[$, $n \in \mathbb{N}$ $x \in]0 ; +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$

T10 : La dérivée de la somme de deux fonctions est la somme des dérivées.

T11 : Si une fonction est multipliée par une constante, sa dérivée l'est aussi.

Rq : T10 est vrai pour une différence, **faux** pour un produit ou un quotient.

3. Opérations sur les dérivées

(u et v sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I)

T10 : $(u + v)' = u' + v'$ **T11 :** $(\lambda.u)' = \lambda.u'$ **T12 :** $(u.v)' = u'.v + u.v'$	**T13 :** $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ **T14 :** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4. Application des dérivées

T15 (admis) **:** Soit f dérivable sur I et f ' sa dérivée
Si **f '** est **sur I** alors **f** est **sur I**
strictement positive * strictement croissante
strictement négative *strictement décroissante
nulle constante
* (sauf peut-être en quelques points où f ' est nulle)

D5 : Soit f définie sur I et $c \in I$.
On dit que f(c) est un Maximum local de f si il existe
un intervalle ouvert J =]a ; b[tel que $c \in J \subset I$ et $\forall x \in J$, $f(x) \leq c$.
Rq : minimum : $f(x) \geq c$.
Rq : Extremum = Max ou min.

T16 (admis) **:** Soit f dérivable sur I et f ' sa dérivée
Si f admet un extremum local en c alors f '(c) = 0
Rq : réciproque fausse. Contre ex $x \longmapsto x^3$ en 0.

T17 (admis) **:** Soit f dérivable sur I, f ' sa dérivée et $c \in I$
Si f 's'annule en c "en changeant de signe" alors f(c) est un extremum local.

p 97 Ex réso A : ex 1 à 4 + 19-25 à 30
p 98 Ex réso B : ex 5 à 8 + 20-31 à 38-39-40-44-46
p 99 Ex réso C : ex 9 à 12 + 21-49-53-55-57-59-62
p100 Ex réso D : ex 13-14 + 22-65-66-69-71-73-76-80
p110 Ex 74-75-78-82-88-91-93-101-B-G