CHAPITRE

9 Loi binomiale et applications

A Le programme

Dans le cas particulier d'expériences identiques et indépendantes à deux issues, on introduit la loi binomiale.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux.	• Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.	La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : – faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de n ($n < 4$) ; – introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions ; – établir enfin la formule générale de la loi binomiale. L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme. En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.
Espérance de la loi binomiale.	• Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.	La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise. On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.

B Notre point de vue

Ce chapitre introduit deux lois de probabilité : la loi de Bernoulli et surtout la loi binomiale. Cette dernière loi, conformément au programme, est d'abord introduite pour de petites valeurs de n ($n = 2$, $n = 3$).
Nous avons pensé qu'il fallait la faire fonctionner tout d'abord pour de petites valeurs de n sans utiliser la formule générale : le recours à un arbre pondéré et le dénombrement, sur l'arbre, des chemins conduisant à un succès permettent à l'élève de comprendre peu à peu le fonctionnement de cette loi. La progression dans le manuel suit cet apprentissage progressif : le **Savoir-faire 2** (lié à la première page de cours) utilise les arbres pondérés, et le professeur trouvera les exercices 11 à 14, puis 32 à 34 pour travailler dans cet esprit. L'**activité 1** introduit cette notion à partir des méthodes du chapitre précédent.
On introduit ensuite les coefficients binomiaux comme le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions d'une épreuve de Bernoulli : l'**activité 2** permet une première approche de ces coefficients ; l'outil utilisé pour le calcul de ces coefficients est principalement la calculatrice. Pour cela, la méthode est décrite page 219 dans le **Savoir-faire 3**, et détaillée dans les fiches « calculatrices » de la fin du livre (Casio : p. 281 ; Texas : p. 282).
La formule générale donnant $P(X = k)$ pour une loi binomiale est ensuite donnée, mais là aussi, c'est la calculatrice (et parfois le tableur) qui va permettre à l'élève de calculer rapidement de façon pratique, soit les probabilités de la forme $P(X = k)$, soit celles de la forme $P(X \leqslant k)$. La méthode est décrite dans le cours (p. 218) et détaillée dans les fiches TICE (p. 222-223).

Le **TP1** permet d'utiliser le tableur pour faire une conjecture puis de modéliser le problème et d'utiliser un logiciel de calcul formel pour calculer la dérivée d'une fonction.
Le **TP2**, conformément au programme, permet de simuler une loi binomiale.

Les notions abordées dans le chapitre 9

- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Coefficients binomiaux et loi binomiale
- Représentation graphique de la loi binomiale
- Espérance d'une loi binomiale

C Réactiver les savoirs

Les notions abordées dans ces exercices permettent de réactiver les notions utiles pour ce chapitre.
Voir manuel p. 286-287 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

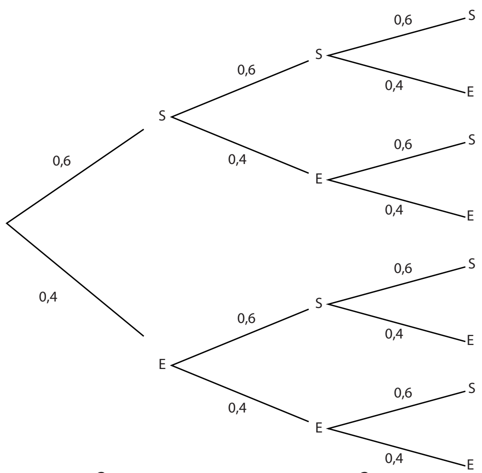
D Activités

Activité 1 Découverte

Cette activité assez courte doit permettre d'utiliser les arbres pour découvrir la loi binomiale.

1. Lors de chaque lancer, la probabilité que le joueur obtienne un secteur gagnant est $p = \frac{3}{5}$.

2. a. Arbre :



b. $P(X = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064$ et $P(X = 3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}216$.

3. a. L'événement « $X = 1$ » est associé aux trois chemins : SEE, ESE, EES.

b. La probabilité de la liste de résultats SEE est $\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}096$.

c. $P(X = 1) = 3 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}288$.

4. Les chemins correspondants à l'événement « X=2 » sont les chemins correspondants aux trois listes de résultats : SSE, SES et ESS.

$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} = 0{,}432$.

5.

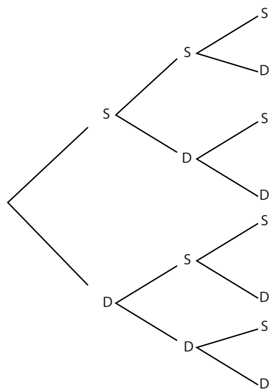
k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,064	0,288	0,432	0,216

On vérifie que la somme des probabilités précédentes est égale à 1.

Activité 2 Les routes du succès

Dans cette activité, on dénombre les chemins de deux arbres permettant de réaliser un nombre de succès déterminé. Cette activité doit permettre aux élèves de découvrir la propriété de symétrie des coefficients binomiaux dans le cas où $n = 3$ puis $n = 4$; cette propriété n'est pas au programme dans le cas général en 1ère ES-L.

1.



2. – Un seul chemin de l'arbre réalise 3 succès.
– Trois chemins de l'arbre réalisent 2 succès.
– Trois chemins de l'arbre réalisent 1 succès.

3. Il y a autant de chemins qui réalisent 2 succès que de chemins qui réalisent 1 succès car chaque fois qu'on a 2 succès sur 3 matchs pour Léa, cela correspond à avoir 1 échec pour son adversaire et inversement.

4. a. b. Un seul chemin du nouvel arbre réalise 4 succès : le chemin SSSS. Quatre chemins de l'arbre réalisent 3 succès : les chemins SSSD, SSDS, SDSS et DSSS.

c. Il y a autant de chemins réalisant 3 succès que de chemins comptant 1 succès car, chaque fois qu'on a 3 succès sur 4 matchs pour Léa, cela correspond à avoir 1 échec pour son adversaire et inversement.

Activité 3 La planche de Galton

Dans cette activité, on estime le nombre de billes qui peuvent tomber dans chacun des casiers d'une planche de Galton à 4 niveaux. Avec le tableur, on réalise l'expérience qu'on peut projeter aux élèves en répétant plusieurs fois l'expérience et en faisant varier le nombre de billes.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :

733200_chap09_activite3.ods (OpenOffice)

733200_chap09_activite3.xlsx (Excel)

1. Le tableur indique le nombre de billes qui tombent dans chaque panier, puis calcule la fréquence des billes dans chaque panier. On peut réitérer l'expérience en appuyant sur la touche **F9**. On observe que le casier récoltant le plus de billes est le casier P alors que les casiers M et R sont ceux en contenant le moins. On remarque que le graphique est le plus souvent symétrique ; les fréquences varient lors de chaque simulation : la fréquence à laquelle la bille arrive dans les casiers N ou Q varie entre 0,23 et 0,28 ; la fréquence à laquelle la bille arrive dans le casier P varie entre 0,35 et 0,40 ; la fréquence à laquelle la bille arrive dans les casiers M ou R varie entre 0,06 et 0,08.

2. a. Pour arriver en N, la bille doit partir une fois vers la droite et trois fois vers la gauche ; il y a quatre chemins qui correspondent à ce cas.

b. De même, pour arriver en Q, la bille doit partir une fois vers la gauche et trois fois vers la droite ; il y a quatre chemins qui correspondent à ce cas.

Pour arriver en M ou en R, la bille ne peut choisir qu'un chemin : en prenant chaque fois à gauche, la bille arrivera en M et en prenant chaque fois vers la droite, la bille arrivera en R.

Pour arriver en P, la bille doit partir deux fois vers la gauche et deux fois vers la droite ; il y a six chemins qui correspondent à ce cas.

c. La probabilité que la bille arrive en M est $\frac{1}{16}$, soit 0,0625 ; on calcule de même la probabilité que la bille arrive en R ; la probabilité que la bille arrive en N est $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, soit 0,25 ; il en est de même pour la probabilité d'arriver en Q.

La probabilité que la bille arrive en P est $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, soit 0,375.

Ces résultats sont cohérents avec les observations faites à la question **1**.

Activité 4 Un nombre moyen de succès

L'objectif de cette activité est de découvrir, grâce au tableur, la formule permettant de calculer l'espérance d'une loi binomiale.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :

733200_chap09_activite4.ods (OpenOffice)

733200_chap09_activite4.xlsx (Excel)

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}58$.

b.

k	$P(X=k)$
0	0,1764
1	0,4872
2	0,3364

c. $E(X) = 1{,}16$.

d. En effectuant un grand nombre de fois ce double tirage, l'espérance moyenne de gains est égale à 1,16 euros.

2. a. La formule saisie dans la cellule **B7** est :

=SOMMEPROD(C4:L4;C5:L5).

b. Chaque fois qu'on change les valeurs de p, on remarque que le contenu de la cellule **B7** semble être égal au produit de n par p.

c. Chaque fois qu'on change les valeurs de n, on remarque que le contenu de la cellule **B7** semble être égal au produit de n par p.

3. On conjecture que $E(X) = n \times p$.

E Exercices

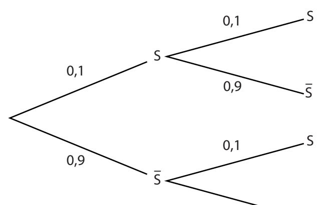
Pour démarrer

1 $n = 2$ et $p = 0{,}75$.

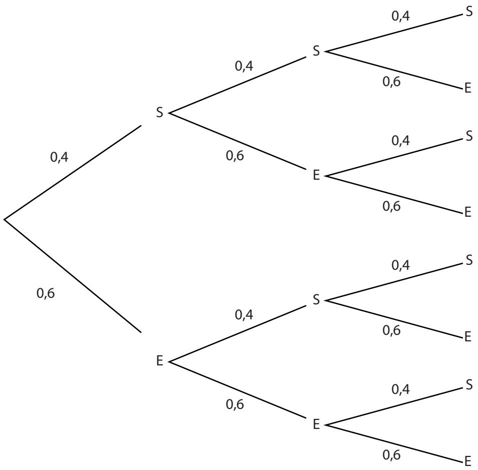
2 **1.** X suit une loi de Bernoulli.

2. Le paramètre est $p = 0{,}6$.

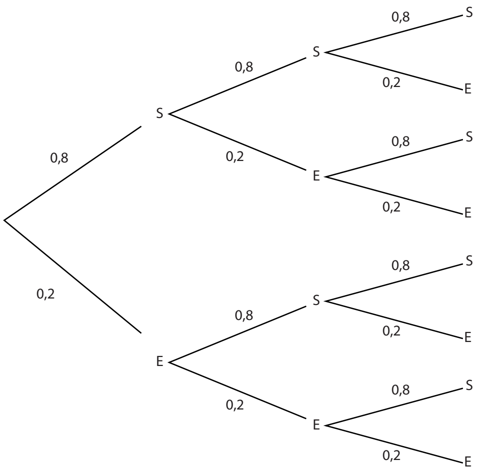
3



4



5 **1.**



2. $n = 3$ et $p = 0{,}8$.

6 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

7 **1.** X suit une loi binomiale.

2. Ses paramètres sont $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

8 **1.** Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

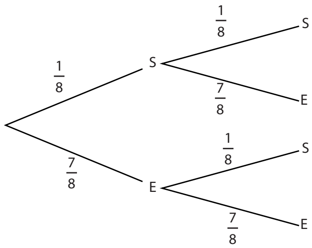
2. $P(X = 2) = 0{,}01$.

9 On répète trois fois de suite la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante ; la probabilité du succès est $\dfrac{1}{6}$, donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

10 On répète quatre fois de suite la même expérience mais il n'y a pas indépendance car on ne remet pas le cube tiré dans le sac. Z ne suit pas une loi binomiale.

11 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

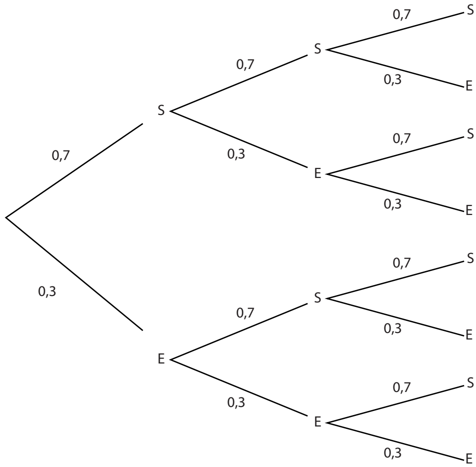
12 **1.**



2. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

b. L'événement « $X = 1$ » est l'événement « on obtient exactement un as » ; $P(X = 1) = 2 \times \dfrac{1}{8} \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{32}$.

13 **1. a.**



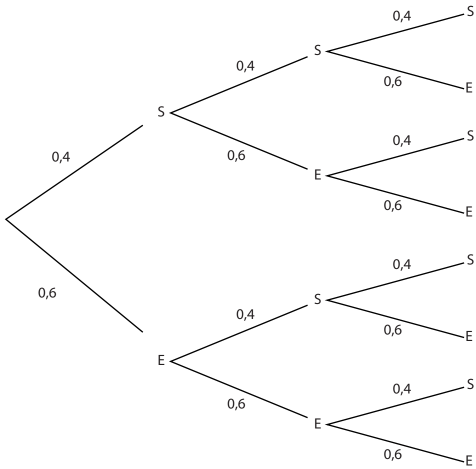
b. Il existe trois chemins permettant d'obtenir exactement une perle bleue.

2. a. Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}7$.

b. $P(Y = 1) = 3 \times 0{,}7 \times 0{,}3^2 = 0{,}189$.

14 **1.** Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

2. a.



b. Il existe trois chemins permettant d'obtenir deux succès.
3. $P(X = 2) = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}288$.

15 **1.** Il y a trois chemins permettant d'obtenir deux succès.
2. On note $\binom{3}{2}$ ce nombre.
3. $P(X = 2) = 3 \times p^2 \times (1 - p)$.

16 $\binom{4}{2}$ est le nombre de chemins réalisant 2 succès pour 4 répétitions.

17 $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^2$.

18 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

19 Les paramètres sont $n = 12$, $p = 0{,}3$ et la valeur de k est 5.

20 **1.** En cellule **B2**, on a entré : **= LOI.BINOMIALE(A2;6;0,2;0)**
2. La probabilité de l'événement « obtenir un succès » est, d'après le tableau, environ égale à 0,39.
3. $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}9$.

21 $E(X) = 12 \times 0{,}15 = 1{,}8$.

22 **1.** On remarque que seule l'une des représentations données est symétrique, c'est la deuxième donc c'est elle qui correspond à $p = 0{,}5$.
2. a. Par lecture, $P(X = 4) \approx 0{,}27$.
b. La calculatrice confirme cette valeur approchée à 0,01 près.

23 $p = \frac{2}{5}$.

Pour s'entraîner

24 X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{20}$.

25 On répète 5 fois de suite la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante puisque la carte est remise dans le jeu. X compte le nombre de trèfles obtenus, donc pour chaque épreuve on appelle succès « obtenir un trèfle » ; la probabilité du succès est $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}25$.

26 X ne peut pas suivre une loi binomiale puisque le fruit tiré est mangé au lieu d'être remis dans le panier ; il n'y a donc pas indépendance.

27 X ne suit pas une loi binomiale car les expériences qui consistent à passer un coup de téléphone ne sont pas indépendantes.
Si on rajoute la phrase « le nombre d'abonnés au téléphone à Paris est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler ces 100 coups de fil à un tirage avec remise », alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 1 - 0{,}57 = 0{,}43$.

28 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}4$.
2. Dans la boucle **Pour,** k doit varier de 1 à 10 et dans la boucle **Si**, on doit comparer A à 0,57.

29 **1.** Si X suit une loi binomiale, alors X ne suit pas une loi de Bernoulli.
2. Réciproquement, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1$ et p.

30 **Faux.** La proposition est fausse car si X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}3$ alors les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

31 **Faux.** Les tirages se font sans remise donc il n'y a pas d'indépendance.

32 **1.** Il y a répétition de deux épreuves de Bernoulli de façon indépendante puisqu'on remet le bracelet tiré dans la boîte. Lors de chaque épreuve, on appelle succès « obtenir un bracelet rouge ». X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}75$.
2. Il y a deux chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir un succès ; chaque chemin a une probabilité égale à 0,1875 donc $P(X = 1) = 0{,}375$.
De même, $P(X = 2) = 0{,}5625$.

33 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}058$.
2. $P(X = 0) = 0{,}942^3 \approx 0{,}836$.
3. $P(X = 1) = 3 \times 0{,}058 \times 0{,}942^2 \approx 0{,}1544$
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}164$.

34 **Exercice résolu, voir p. 227 du manuel.**

35 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

36 **Faux.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}45$ donc la proposition est fausse puisque n n'est pas égal à 200.

37 **Vrai.** La proposition est vraie car :
$P(X = 1) = 3 \times 0{,}45 \times 0{,}55^2 \approx 0{,}408$.

38 $\binom{16}{16} = 1$; $\binom{16}{1} = 16$; $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$; $\binom{200}{0} = 1$.

39 $\binom{15}{4} = 1\,365$; $\binom{20}{6} = 38\,760$; $\binom{30}{10} = 30\,045\,015$; $\binom{100}{3} = 161\,700$.

40 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

41 **1.**

K	0	1	2	3	4
B	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

2. Cet algorithme permet de trouver les coefficients binomiaux $\binom{N}{K}$ pour tout K compris entre 0 et N, la valeur N étant saisie au préalable.

42 **Vrai.** Un coefficient binomial est toujours un entier.

43 **Vrai.** $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$.

44 **Faux.** Ce coefficient binomial n'a pas de sens puisque 10 est supérieur à 8 ; c'est $\binom{10}{8}$ qui est égal à 45.

45 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}6$.
2. $P(X = 0) = 0{,}0256$.
3. $P(X = 2) = 0{,}3456$.

46 **1. a.** A est l'événement « $X = 4$ ».
b. $P(X = 4) = \binom{6}{4} \times 0{,}8^4 \times 0{,}2^2 \approx 0{,}246$.
2. $P(B) = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}999936 \approx 1$.

47 **1.** $P(X = 5) \approx 0{,}175$; $P(X = 10) \approx 0{,}002$.
2. $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}99$.
$P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}196$.

48 **1.** $P(X = 27) \approx 0{,}236$.

$P(X \geqslant 27) = 1 - P(X \leqslant 26) \approx 0{,}647$.
2. $P(21 \leqslant X \leqslant 25) = P(X \leqslant 25) - P(X \leqslant 20) \approx 0{,}175$.
$P(X > 24) = 1 - P(X \leqslant 24) \approx 0{,}927$.

49 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

50 **1. Algorithme complété** :

Variables	n, I, J et k sont des entiers S et p sont des nombres réels
Entrée	Saisir n, p, I, J
Initialisation	S prend la valeur 0
Traitement	**Pour** k variant de I à J S prend la valeur $S + P(X = k)$ **Fin Pour**
Sortie	Afficher S

2. Modification de l'algorithme :

Variables	n, I et J sont des entiers S et p sont des nombres réels
Entrée	Saisir n, p, I, J
Traitement	S prend la valeur $P(X \leqslant J) - P(X \leqslant I - 1)$
Sortie	Afficher S

51 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}7$.
2. $P(X = 60) \approx 0{,}008$.
3. a. $P(60 \leqslant X \leqslant 63) = P(X \leqslant 63) - P(X \leqslant 59) \approx 0{,}067$.
b. La probabilité pour que le nombre de lettres parvenant à leur destinataire soit compris entre 60 et 63 est environ égale à 0,067.

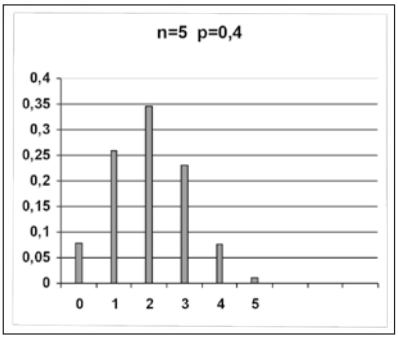
52 **Exercice résolu, voir p. 229 du manuel.**

53 **1.** On considère la variable aléatoire X qui, à chaque série de 20 tirs, associe le nombre de tirs réussis. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}9$.
2. $P(X = 18) \approx 0{,}285$.

54 **1.** $P(X = 3) \approx 0{,}2304$.
2. Avec la calculatrice on obtient :

X	Y1
0	.07776
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.01024

3. Représentation graphique :



55 **1. a.** Tableau :

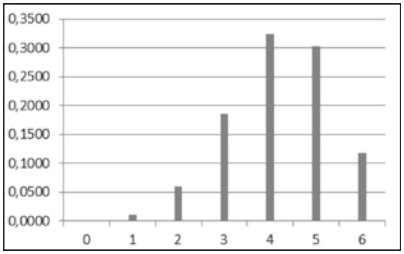
	A	B
1	k	P(Y=k)
2	0	0,1575
3	1	0,3701
4	2	0,3260
5	3	0,1276
6	4	0,0187

b. $P(Y \geqslant 3) = P(Y = 3) + P(Y = 4) \approx 0{,}1463$.
2. En utilisant les valeurs approchées du tableau, on obtient $E(Y) \approx 1{,}4797$.

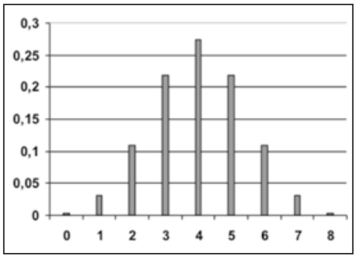
56 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}7$.
2. $P(X = 3) = 0{,}18522$.
3. a. Tableau obtenu avec la calculatrice :

X	Y1
0	7.3E-4
1	.01021
2	.05954
3	.18522
4	.32414
5	.30253
6	.11765

b. En utilisant le tableau précédent, on trouve que : $E(X) \approx 4{,}20006$.
4. Représentation graphique :

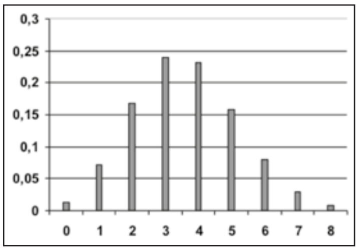


57 **1.** Représentation graphique :



2. Le graphique est symétrique.
3. $P(X = k)$ est maximale pour $k = 4$.

58 **1.** Représentation graphique :



2. $P(X = k)$ est maximale pour $k = 3$.

59 **1. Faux**. $P(X=0)=(1-p)^{10}$.

2. Faux. Le nombre de chemins comportant 4 succès sur 10 est égal à 210 et pas à 4 donc $P(X=4)=210p^4(1-p)^6$.

60 **1. Faux** car il manque le coefficient binomial ; on a :

$$P(X=3)=\binom{7}{3}\times 0{,}8^3\times 0{,}2^4=35\times 0{,}8^3\times 0{,}2^4.$$

2. Vraie. $P(X=3)\approx 0{,}029$.

61 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}1$ puisque les dix numéros de la roue ont la même chance d'être obtenus.

2. $E(X)=1$; si Mehdi joue un grand nombre de fois, il peut espérer obtenir en moyenne une fois le numéro 3 sur 10 lancers.

62 **1.** S suit la loi binomiale de paramètres $n=40$ et $p=0{,}25$ puisque le candidat coche au hasard et qu'une seule réponse sur les quatre proposées est exacte.

2. $P(S\geqslant 36)=1-P(S\leqslant 35)\approx 0$.

3. $E(S)=10$; cela signifie que si le candidat remplit un très grand nombre de fois ce questionnaire au hasard, il peut espérer en moyenne avoir 10 bonnes réponses sur les 40 questions posées.

63 **Exercice corrigé, voir p. 287 du manuel.**

64 **Exercice résolu, voir p. 231 du manuel.**

65 À partir de $n=117$, l'espérance de X est supérieure ou égale à 40,7.

66 **Faux**. X suit la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=\frac{3}{4}$ donc $P(X=9)\approx 0{,}2581$.

67 **Vraie**. $E(X)=9$.

68 **1.** $P(X=3)\approx 0{,}006$.

2. $P(X\geqslant 3)\approx 0{,}007$.

3. $P(X\leqslant 1)\approx 0{,}94$.

4. $E(X)=1$ donc, en moyenne, il y a une pièce défectueuse par lot.

69 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0{,}24$.

2. $P(X=5)\approx 0{,}092$.

3. $P(X>8)=1-P(X\leqslant 8)\approx 0{,}0003$.

Faire le point

Voir livre page 287. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

Revoir des points essentiels

70 On répète sept fois de suite la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante. La variable aléatoire qui, à chaque série de sept lancers, associe le nombre de fois où l'on obtient la face « 5 » suit la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{1}{6}$.

71 $P(X=8)\approx 0{,}018$ à 0,001 près.

$P(X\leqslant 3)\approx 0{,}254$ à 0,001 près.

$P(X\geqslant 5)=1-P(X\leqslant 4)=0{,}5$.

Travaux pratiques

TP 1 Décoration festive

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr :

733200_chap09_TP1_partieA_correction.ods (OpenOffice)

733200_chap09_TP1_partieA_correction.xlsx (Excel)

733200_chap09_TP1_partieB_correction.xws (Xcas)

Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :

733200_chap09_TP1_partieA_correction.ods (OpenOffice)

733200_chap09_TP1_partieA_correction.xlsx (Excel)

733200_chap09_TP1_partieB_correction.ggb (GeoGebra)

733200_chap09_TP1_partieB_correction.xws (Xcas)

Dans ce TP, on utilise d'abord le tableur pour faire une conjecture sur le maximum de vraisemblance puis on modélise et on prouve la conjecture après un calcul de dérivée qui peut être fait avec un logiciel de calcul formel.

A. Chercher et représenter

1. a. Les valeurs prises par X sont les entiers de 0 jusqu'à 7.

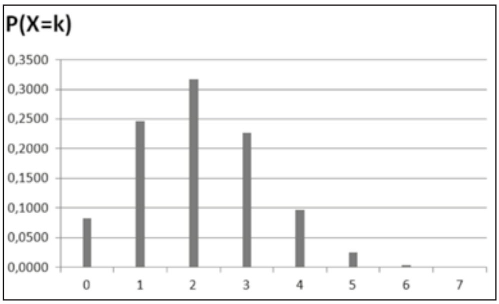
b. X suit la loi binomiale de paramètres $n=7$ et p.

2. a. On saisit 0 dans la cellule **B4**, puis la formule **=B4+1** dans la cellule **B5**.

b. Dans la cellule **C4**, on entre la formule **=LOI.BINOMIALE(B4;7,A$2;0)** puis on recopie cette formule vers le bas.

1	p		
2	0,3		
3		k	P(X=k)
4		0	0,0824
5		1	0,2471
6		2	0,3177
7		3	0,2269
8		4	0,0972
9		5	0,0250
10		6	0,0036
11		7	0,0002

c. On obtient la représentation graphique ci-dessous :



d. $P(X=4)\approx 0{,}0972$.

3. a. On saisit 0,1 dans la cellule **B1** , puis **=B1+0,1** dans la cellule **C1**.

On saisit ensuite **=LOI.BINOMIALE(4;7;B1;0)** dans la cellule **B2**.

b. On obtient le tableau :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	p	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
2	P(X=4)	0,003	0,029	0,097	0,194	0,273	0,290	0,227	0,115	0,023

On voit que la valeur de $P(X = 4)$ semble être maximale lorsque p est entre 0,5 et 0,6.

c. On reconstruit un tableau pour p entre 0,55 et 0,62 avec un pas de 0,01 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
p	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6	0,61	0,62
$P(X=4)$	0,2918	0,2932	0,2937	0,2934	0,2923	0,2903	0,2875	0,2838

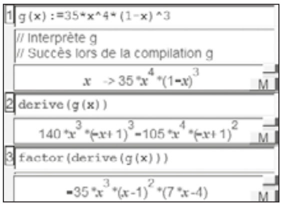
d. La probabilité de l'événement « X=4 » semble maximale pour p environ égal à 0,57.

B. Modéliser

1. a. Le nombre de branches permettant d'obtenir 4 succès sur 7 répétitions est égal à $\binom{7}{4}$.

b. $\binom{7}{4} = 35$. **c.** $P(X = 4) = 35p^4(1 - p)^3$.

2. a. et **b.**



c. Sur [0 ; 1], le signe de $g'(x)$ est le même que le signe de $4 - 7x$ donc, la fonction g est croissante sur $\left[0\,;\frac{4}{7}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{4}{7}\,;1\right]$; elle admet un maximum pour $x = \frac{4}{7}$.

C. Communiquer

1. Une valeur approchée de $\frac{4}{7}$ à 0,01 près est 0,57, donc les résultats obtenus aux questions **A 3.d.** et **B 2.c.** sont cohérents.

2. La probabilité d'obtenir quatre boules rouges lors du tirage successif de sept boules avec remise est maximale lorsque la proportion de boules rouges dans le carton est égale à $\frac{4}{7}$.

TP2 Simulations d'une loi binomiale

Fichiers associés sur* www.bordas-indice.fr *et sur le manuel numérique Premium :

733200_chap09_TP2_partieA_correction.xlsx (Excel),
733200_chap09_TP2_partieA_correction.ods (OpenOffice).

L'objectif de ce TP est de simuler une loi binomiale de paramètres 6 et p. On réalise cette simulation à l'aide d'un tableur, puis on complète un algorithme. On répète 1 000 fois cette simulation sur tableur et on compare aux résultats théoriques.

A. Simulation avec un tableur

1. L'intérêt de nommer cette cellule par p est double : dans toutes les formules utilisées, p va apparaître, ce qui prend beaucoup plus de sens que **A2**, et cela évite d'utiliser des références absolues dans les formules (comme A2).

2. a. La formule **=SI(ALEA()<p;1;0)** fournit comme résultat 1 lorsque le nombre aléatoire généré est compris entre 0 et p, et 0 sinon. Cette formule simule donc une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

b. En recopiant cette formule dans la plage **D2:H2**, on obtient ainsi la simulation de six épreuves de Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et p.

c. On saisit dans **I2** la formule **=NB.SI(C2:H2;1)**.
Puisque chaque succès est représenté par un 1, on aurait également pu calculer le nombre de succès dans la cellule **I2** avec la formule : **=SOMME(C2:H2)**.

d. En recopiant vers le bas jusqu'à la ligne 1001 la zone de cellules **C2:I2**, on obtient ainsi 1 000 schémas de Bernoulli de paramètres 6 et p.

3. a. On saisit dans les cellules **K2** à **K8** les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 afin d'avoir toutes les possibilités pour le nombre de succès.

b. Le nombre de fois où l'on n'a aucun succès est donné par : **=NB.SI(I$2:I$1001;K2)**, puisqu'on compte dans la zone de cellules **I2:I1001** le nombre de fois où on trouve 0 (nombre saisi en **K2**).

c. Il est préférable de saisir des références absolues dans la formule car cela permettra de recopier cette formule vers le bas pour les six autres cas.
On peut se passer des références absolues mais cela exige de réécrire six fois la formule adéquate.

d. Pour calculer la fréquence d'avoir 0 succès sur ces 1 000 simulations, on entre en **M2** la formule **=L2/1000**, puis on la recopie vers le bas dans la zone **M3:M8**.
La probabilité théorique est fournie en **N2** par la formule **=LOI.BINOMIALE(K2;6;p;0)** : cette formule renvoie la probabilité d'avoir 0 succès (nombre entré en **K2**) pour une loi binomiale de paramètres 6 et p. On recopie ensuite cette formule dans la zone **N3:N8**.

4. On obtient plusieurs séries de 1 000 simulations à l'aide de la touche **F9**.

5. Représentation graphique

Avec Excel :
– Pour représenter sur un même graphique la série des fréquences et celle des probabilités théoriques, sélectionner les colonnes **M** et **N** (avec les titres), puis choisir Colonne, puis Histogramme 2D.
– Pour modifier les étiquettes de l'axe horizontal, après un clic droit sur le graphique, choisir Sélectionner les données, puis choisir Modifier (les étiquettes de l'axe horizontal).

Avec Open Office :
Pour représenter sur un même graphique la série des fréquences et celle des probabilités théoriques, sélectionner les colonnes **K**, **M** et **N** avec les titres (utiliser la touche Ctrl pour sélectionner des plages non contigües), cliquer sur l'icône Diagramme et choisir le type de diagramme Colonne.
Puis, dans Plage de données, cocher « Première colonne comme étiquette », puis cliquer sur Terminer.

B. Algorithme de simulation

1. Cet algorithme simule un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et p. La variable S compte le nombre de succès.

2. On appelle L la liste des résultats. Après chaque épreuve de Bernoulli, on obtient le nombre de succès S et le résultat L[$S + 1$] est alors incrémenté d'une unité.

On calcule L[$S + 1$] et non L[S], car les listes sont en général indicées à partir de 1.
On affiche en sortie la liste des fréquences, obtenue en calculant L/1000.

```
Variables       p est un réel, i, j et S sont des entiers
Entrée          Saisir p
Initialisation  L prend la valeur {0,0,0,0,0,0}
Traitement      Pour j allant de 1 à 1000
                  S prend la valeur 0
                  Pour i allant de 1 à 6
                     Si random < p
                       Alors S prend la valeur S + 1
                     Fin Si
                  Fin Pour
                L[S + 1] prend la valeur L[S + 1] + 1
                Fin Pour.
Sortie          Afficher L/1000
```

Pour approfondir

72 X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}08$ avec n entier naturel inférieur ou égal à 345.

1. $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}92^n$.

2.a. On cherche n tel que $1 - 0{,}92^n \geqslant 0{,}7$.

b. Cette inégalité équivaut à $0{,}92^n \leqslant 0{,}3$.

c. *Dans certains livres élèves, il y a une erreur dans l'algorithme écrit : une variable m a été introduite à tort ; voici le bon énoncé :*

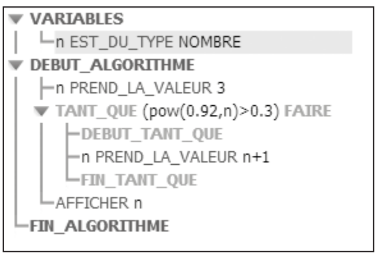
```
Variables       n est un entier
Entrée          n prend la valeur 3
Traitement      Tant Que ...

                ....................
                Fin Tant Que
Sortie          Afficher n
```

L'algorithme complété est alors :

```
Variables       n est un entier
Entrée          n prend la valeur 3
Traitement      Tant Que 0,92^n > 0,3 Faire
                        n prend la valeur n + 1
                Fin Tant Que
Sortie          Afficher n
```

d. Algorithme programmé sur Algobox :



e. À partir de $n = 15$, les douaniers atteindront leur objectif.

73 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de 60 appels, associe le nombre d'appels aboutissant à la souscription d'un nouveau forfait.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}12$.

1. $P(X = 5) \approx 0{,}12$.

2. $P(X < 10) = P(X \leqslant 9) \approx 0{,}822$.

74 **1. a.** C suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}40$.

b. $P(\text{A}) = P(C = 3) = 0{,}2304$.

2. a. $P(\text{A}) = 10 \times p^3 \times (1 - p)^2$.

b. En utilisant un tableau de valeurs donné par la calculatrice, la probabilité de l'événement A est maximale pour $p = 0{,}6$.

3. a. $f'(x) = 10x^2(1 - x)(3 - 5x)$.
Sur [0 ; 1], le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $3 - 5x$ donc la fonction f est croissante sur [0 ; 0,6] et décroissante sur [0,6 ; 1].

b. La probabilité de l'événement A est maximale pour $p = 0{,}6$.
On obtient ainsi la démonstration du résultat obtenu à la question **2. b.**

Pour aller plus loin

75 On cherche à comparer $P(X \geqslant 1)$ et $P(Y = 1)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 24$ et $p = \frac{1}{36}$.
On obtient avec la calculatrice :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}5177$ et $P(Y = 1) \approx 0{,}349$.
On a ainsi plus de chances d'obtenir au moins une fois un six en lançant un dé quatre fois de suite que d'obtenir un double six en lançant vingt-quatre fois de suite deux dés.

76 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de sept clients, associe le nombre de personnes n'achetant pas l'appareil photo en promotion.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}8$.
On cherche $P(X \geqslant 2)$:
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}9996$ à 0,0001 près.