CHAPITRE
6
Suites numériques

A Le programme

Dans de nombreux domaines, notamment l'économie ou les sciences sociales, on s'intéresse à l'évolution de phénomènes qui peuvent être modélisés par une suite. L'introduction de la notion de suite peut ainsi s'appuyer sur ces situations concrètes en exploitant largement, dans des registres différents, les activités algorithmiques et le tableur qui favorisent la compréhension de la notation indicielle.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites Modes de génération d'une suite numérique. Sens de variation d'une suite numérique.	– Modéliser et étudier une situation simple à l'aide de suites. – Mettre en œuvre un algorithme permettant de calculer un terme de rang donné. – Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.	Il est important de varier les outils et les approches. L'utilisation du tableur et la mise en œuvre d'algorithmes sont l'occasion d'étudier en particulier des suites générées par une relation de récurrence.
Suites arithmétiques, suites géométriques de raison positive.	– Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison. – Connaître le sens de variation des suites arithmétiques et des suites géométriques de terme général q^n.	À partir de situations concrètes, exploitées conjointement dans les registres graphique et numérique, on introduit les notions de : – suite arithmétique, variation absolue, évolution linéaire ; – suite géométrique, variation relative, évolution exponentielle. On mène une comparaison de ces deux types d'évolution et on sensibilise les élèves à l'existence d'autres types d'évolution. On peut utiliser un algorithme ou un tableur pour traiter des problèmes de comparaison d'évolutions, de seuils et de taux moyen.

B Notre point de vue

Ce chapitre traite de la notion de suites numériques qui sont introduites dans les **activités 1** et **2**. Dans la première activité, la suite est définie par la restriction à l'ensemble $\mathbb{N}$ d'une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, tandis que nous avons choisi une approche algorithmique pour présenter un exemple de suite définie par récurrence dans l'**activité 2**. Cette activité constitue la première des nombreuses rencontres que feront les élèves avec l'algorithmique dans ce chapitre, puisque ces compétences sont présentes à plusieurs étapes, dans le cours pour l'obtention des termes d'une suite et dans les exercices de tous niveaux.
Les **parties 2 et 3 du cours** sont consacrées aux suites arithmétiques et aux suites géométriques. Nous présentons dans ces pages les notions d'évolutions linéaires et exponentielles. Pour chacune de ces catégories de suites, nous avons

consacré un savoir-faire à la modélisation afin de donner du sens à l'utilisation de cet outil mathématique.
La dernière partie du cours est consacrée à l'étude des variations, et notamment celles des suites arithmétiques et géométriques. Un savoir-faire est consacré à la comparaison de ces deux types d'évolutions.
Enfin, deux TP sont consacrés à l'étude des suites numériques.

Les notions abordées dans le chapitre 6

- Généralités sur les suites
- Les suites arithmétiques
- Les suites géométriques
- Sens de variation d'une suite

C Réactiver les savoirs

Voir p. 285 du manuel, le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium pour les corrigés détaillés.

D Activités

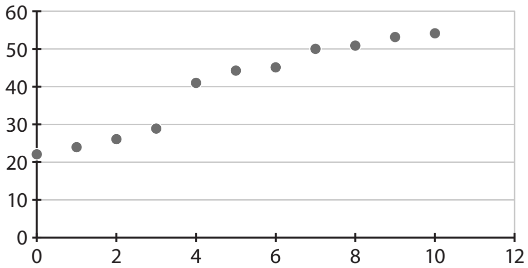
Activité 1 Le nombre d'internautes en France

Il s'agit dans cette activité d'introduire la notion de suite numérique à partir d'un tableau de données.

1. $u_0 = 22$, $u_1 = 24$ et $u_2 = 26$.

2. $u_5 = 44$, cette valeur correspond au nombre d'internautes en France en 2008.

3.



4. $v_0 = 20$, $v_1 = 34$, $v_2 = 46$ et $v_3 = 56$.

5. 2015 correspond au rang 12, donc on obtient $v_{12} = 56$. Le nombre d'internautes serait le même qu'en 2006, alors qu'il ne fait qu'augmenter : ce modèle n'est donc pas des plus réalistes.

Activité 2 Une suite récurrente

Dans cette activité, nous donnons un exemple de suite définie par récurrence. Il nous a semblé intéressant de voir cette notion sous un aspect algorithmique car les élèves ont été familiarisés avec ces pratiques dans les classes antérieures. Après la détermination des premiers termes dans deux situations, les élèves sont amenés à découvrir la relation de récurrence induite par l'algorithme.

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :

733200_chap06_activite2.alg (Algobox).

1. Si on entre 1 comme valeur de A, les sept premiers nombres affichés sont 1 ; – 1 ; – 5 ; – 13 ; – 29 ; – 61 et – 125.

2. Si on entre 3 comme valeur de A, les sept premiers nombres affichés sont tous égaux à 3.
$a_1 = 2a_0 - 3$, $a_2 = 2a_1 - 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

Activité 3 Un service de vidéo à la demande

Il s'agit dans cette activité d'introduire la notion de suite arithmétique à travers un problème contemporain.

1. a. $p_2 = 34$ € ; $p_3 = 36$ €.
b. $p_{n+1} = p_n + 2$.
2. a. 50 €.
b. Le coût payé par Léo est de $2n$ €.
c. $p_n = 30 + 2n$.
3. a. Respectivement 90, 110 et 130 €.
b. À partir de 35 films.

Activité 4 Un nouveau type de suite

On se propose dans cette activité d'introduire la notion de suite géométrique en utilisant un motif fractal.

1. a. L'aire vaut 4 unités d'aire.
b. $4 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 8$.
c. Les aires aux étapes 2 et 3 valent respectivement 16 et 32 unités d'aire.
2. $u_1 = 8$, $u_2 = 16$ et $u_3 = 32$.
3. $u_{n+1} = 2u_n$.
4. La raison de la suite (u_n) est 2 et l'on peut conjecturer que $u_n = 4 \times 2^n$.
5. a. $u_{33} = 4 \times 2^{33} = 34\,359\,738\,368$.
b. Cette aire vaudra 1 024 à la huitième étape.

Activité 5 Un choix à faire

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :

733200_chap06_activite5.xlsx (Excel).

On se propose dans cette activité de découvrir le sens de variation des suites arithmétiques et géométriques à travers un problème d'augmentation de salaire.

1. a. La prime sera de 460 € en 2016 et de 470 € en 2017.

b. On ajoute toujours le même nombre pour passer d'un terme au suivant : la suite est donc arithmétique.

c. $p_{n+1} - p_n = 10$.

d. La suite (p_n) est croissante car, pour tout n, $p_{n+1} > p_n$ ou encore $p_{n+1} - p_n > 0$.

e. Pour qu'une suite soit croissante, il faut que sa raison soit positive.

2. a. $q_0 = 500$, $q_1 = 505$ et $q_2 = 510{,}05$.

b. Par 1,05.

c. Cette suite est croissante, car la prime augmente.

d. Une suite géométrique est croissante si sa raison est supérieure à 1.

3. Les employés seront lésés en 2026, soit lorsque $n = 11$.

E Exercices

Pour démarrer

1 L'indice du troisième terme est 2.

2 **1.** $v_3 = 2$ et $v_7 = 9$.

2. v_5 et v_8.

3 $w_1 = 4$ et $w_2 = 16$.

4 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

5 $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = -1$, $u_4 = 4$, $u_5 = 2$ et $u_6 = 0$.

6 $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, $u_4 = 5$, $u_5 = 9$ et $u_6 = 2$.

7 $u_2 = 4$, $u_3 = 9$ et $u_7 = 49$.

8 $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = 2$.

9 **1.** $v_1 = 2v_0 - 3 = 2 \times 3 - 3 = 3$.

2. $v_2 = 2v_1 - 3 = 2 \times 3 - 3 = 3$.

10 **1.** $v_1 = 1 - v_0 = -1$.

2. $v_2 = 1 - v_1 = 2$, $v_3 = 1 - v_2 = -1$ et $v_4 = 1 - v_3 = 2$.

3. $v_{99} = -1$ et $v_{2014} = 2$.

11 **1.** $w_1 = 3w_0 + 1 = 3 \times (-4) + 1 = -11$.

2. $w_2 = 3w_1 + 1 = -32$.

3. $w_{n+1} = 3w_n + 1$.

12 Il faut taper la formule `=A3*2+1`.

13 **1.** La valeur retournée est 5.

2. $N = 3$.

14 $u_1 = 10$.

15 **1.** Faux.

2. Faux.

16 **1.** $u_1 = 5$, $u_2 = 8$, $u_3 = 11$.

2. $u_n = 2 + 3n$.

17 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

18 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$ donc la différence de deux termes consécutifs vaut $\frac{1}{2}$, la suite est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

19 $v_{n+1} - v_n = -1$ donc la différence de deux termes consécutifs vaut -1, la suite est donc arithmétique de raison -1.

20 $w_1 - w_0 = -3$ n'est pas égal à $w_2 - w_1 = -4$, donc la suite ne peut être arithmétique.

21 **1.** $u_2 = 38$, $u_3 = 57$.

2. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours 19. La suite est donc arithmétique de raison 19.

22 $v_1 = 6$.

23 **1.** Faux : la formule est fausse pour $n = 0$ par exemple.

2. Vrai.

24 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

25 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5$, donc le rapport de deux termes consécutifs vaut 5, la suite est donc géométrique de raison 5.

26 $\frac{t_1}{t_0} = 2$ n'est pas égal à $\frac{t_2}{t_1} = 4$, donc la suite ne peut être géométrique.

27 `=B2*5`.

28 **1.** $u_0 = 8$, $u_1 = 4$.

2. La raison vaut $\frac{1}{2}$.

29 $u_4 - u_3 < 0$.

30 $u_{11} - u_{10} > 0$.

31 La suite (u_n) semble être croissante, la suite (v_n) décroissante et la suite (w_n) constante.

32 La suite (u_n) est décroissante car sa raison est négative.

33 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

34 La suite (w_n) est décroissante car elle est arithmétique de raison négative.

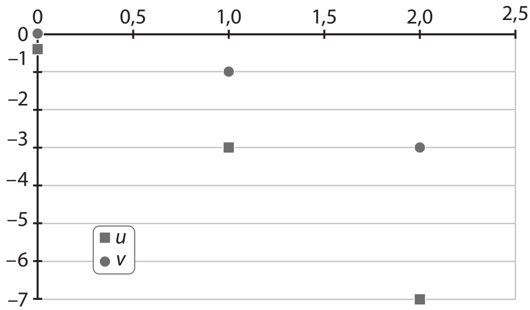
35 La suite (v_n) est croissante car elle est géométrique de raison supérieure à 1.

Pour s'entraîner

36 **1.** $u_0 = -1$, $u_1 = -3$, $u_2 = -7$, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = -3$.

2. $u_4 = -3$, $v_4 = -15$.

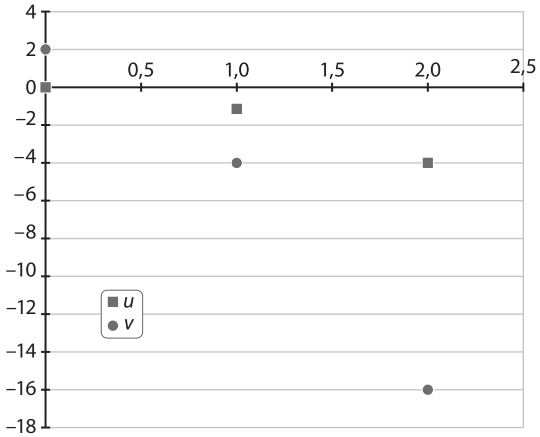
3.



37 **1.** $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $v_0 = 2$, $v_1 = -4$.

2. $u_3 = -9$, $v_3 = -256$.

3.



38 **1.** $u_0 = -1$, $u_1 = 1 - \sqrt{2}$, $u_2 = 2 - \sqrt{5}$, $u_{100} = 100 - \sqrt{10\,001}$.

2. Impossible de calculer u_0 et u_1.

$u_2 = 2$, $u_{100} = \dfrac{17}{1\,650}$.

3. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_{100} = 1$.

39 **1.** $u_1 = 7$, $u_2 = 27$.

2. $u_1 = -2$, $u_2 = -2$.

40 **1.** $u_1 = -5$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$.

2. $u_1 = \dfrac{7}{2}$, $u_2 = \dfrac{17}{7}$.

41 $u_{n-1} = n^2 - 2n + 2$, $u_{n+1} = n^2 + 2n + 2$.

42 **1.** $\boxed{\text{2A+1}}$.

2. Il faut placer « Afficher A » dans la boucle Pour.

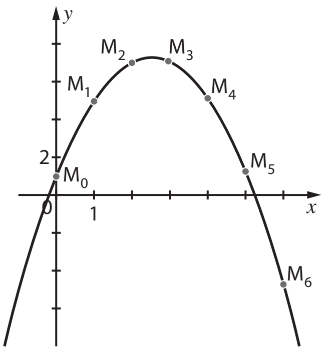
43 **1.** Faux, par exemple $u_n = n(n-1)(n-2)$ n'est pas nul pour $n = 3$.

2. Si $u_n = 0$ pour tout n, alors $u_2 = u_1 = u_0$ qui est vrai.

44 **Exercice résolu, voir p. 146 du manuel.**

45 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 7$, $u_3 = 7$, $u_4 = 5$, $u_5 = 1$ et $u_6 = -5$.

2.



3. Pour tout entier naturel n, M_n a pour coordonnées $(n\,;-n^2 + 5n + 1)$ donc M_n est situé sur la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x + 1$.

46 **Exercice résolu, voir p. 146 du manuel.**

47 **1.** $\boxed{\text{=3*A3+1}}$.

2. $\boxed{\text{=2*C2+1}}$.

48

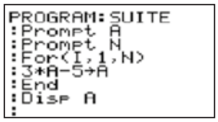
n	u_n
0	2
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2

49

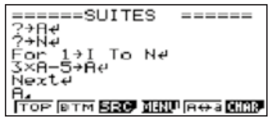
n	u_n
0	5,00
1	1,30
2	-0,10
3	-4,30
4	-16,90
5	-54,70
6	-168,10
7	-508,30
8	-1528,90
9	-4590,70
10	-13776,10
11	-41332,30

50 **1.**

TEXAS



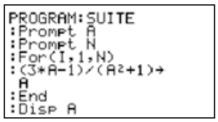
CASIO



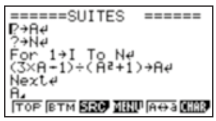
2. $u_{10} = -29\,522$.

51 **1.**

TEXAS



CASIO



2. $u_{17} \approx -1{,}62$.

52 Faux. Par exemple, la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour n plus grand que 1.

53 Faux : $u_2 = 16$.

54 Faux : $u_{n+2} = 4u_n - 3$.

55 $u_n = 3n + 1$, $u_{25} = 76$.

56 $u_n = 2n - 1$, $u_{25} = 49$.

57 $u_n = \dfrac{1}{3}n + 5$, $u_{25} = \dfrac{40}{3}$.

58 $u_n = -3n + 17$, $u_{25} = -58$.

59 **1.** Non arithmétique.

2. $u_0 = -1$, $r = 5$.

60 **1.** $u_0 = -\dfrac{2}{5}$, $r = \dfrac{1}{5}$.

2. Non arithmétique.

61 **1.** Non arithmétique.

2. Arithmétique, de raison $\dfrac{2}{5}$.

62 Remarque : il se peut que la ligne « Affecter la valeur … à … » soit écrite deux fois, il s'agit d'une erreur.

Traitement et Sortie
Pour I variant de 1 à N faire
  Affecter U + r à la valeur U
  Afficher U
Fin Pour

63 **1.** $u_n = 4n - 1$.

2. À partir de $n = 251$.

64 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

65 Vrai, de raison nulle.

66 Faux, les points sont certes alignés, mais le coefficient directeur est la raison.

67 Vrai, de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $\frac{3}{5}$.

68 **1.** $e_1 = 35$, $e_2 = 40$.

2. $e_{n+1} = e_n + 5$, $e_n = 30 + 5n$.

3. Après 14 mois, elle disposera de 100 €.

69 **1.** $u_1 = 1\,600$, $u_2 = 1\,700$.

2. $u_n = 1\,500 + 100n$.

3. $u_4 = 1\,900$.

4. Pour $n = 15$, soit en 2029.

70 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

71 Vrai. Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre.

72 Faux, en 2020 la licence coûtera 122 €.

73 **1.** $u_1 = 14$, $u_2 = 28$ et $u_3 = 56$.

2. $u_n = 7 \times 2^n$, $u_8 = 1\,792$.

74 **1.** $v_1 = \frac{2}{3}$, $v_2 = \frac{2}{9}$ et $v_3 = \frac{2}{27}$.

2. $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $v_{10} = \frac{2}{59\,049}$.

75 $v_1 = \frac{6}{5}$, $v_2 = \frac{18}{5}$ et $v_n = \frac{2}{5} \times 3^n$.

76 $v_1 = \frac{5}{3}$, $v_2 = \frac{5}{9}$ et $v_n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

77 $v_1 = 9$, $v_2 = 5{,}4$ et $v_n = 15 \times 0{,}6^n$.

78 $v_1 = 12$, $v_2 = 14$ et $v_n = 10 \times 1{,}2^n$.

79 **1.** $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 18$. Cette suite n'est pas géométrique car sinon on aurait $u_2 = 2\,u_1$.

2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5$ donc cette suite est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 35$.

80 **1.** Non géométrique.

2. La suite est géométrique de raison 7 et de premier terme $v_0 = 3$.

81 **1.** La suite est géométrique de raison $\frac{5}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

2. Non géométrique.

82 **1.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{5}$ donc cette suite est géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

2. Non géométrique : $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 16$.

83 Remarque : il se peut que la ligne « Affecter la valeur … à … » soit écrite deux fois, il s'agit d'une erreur.

```
Traitement et Sortie
Pour I variant de 1 à N faire
   Affecter U × r à la valeur U
   Afficher U
Fin Pour
```

84 Faux : certaines suites ne sont ni l'un ni l'autre, par exemple la suite définie par $u_n = n^2$.

85 Vrai, sa raison est -1.

86 **1.** $u_1 = 324\,000$, $v_1 = 291\,000$, $u_2 = 349\,920$, $v_2 = 282\,270$.

2. $u_n = 300\,000 \times 1{,}08^n$, $v_n = 300\,000 \times 0{,}97^n$.

87 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

88 **1.** $u_1 = 22\,032$.

2. $u_n = 21\,600 \times 1{,}02^n$ et cette suite est géométrique car pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre.

3. Il faudra 36 augmentations, soit 36 ans.

89 **1.** Faux, de raison 0,92.

2. Vrai elle a diminué de presque 53 %.

3. Vrai car $0{,}92^{30} \simeq 0{,}82$.

90 **1.** La suite (u_n) est croissante car elle est arithmétique de raison positive.

2. $u_{n+1} - u_n = -4n - 2 < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

91 **1.** $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

92 **1.** $u_{n+1} - u_n = 4n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

2. $u_{n+1} - u_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

93 **1.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

2. La suite (u_n) est décroissante car elle est arithmétique de raison négative.

94 **1.** La suite (u_n) est croissante car elle est arithmétique de raison positive.

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} < 1$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

95 **Exercice résolu, voir p. 150 du manuel.**

96 **1.** $u_{n+1} - u_n = n \times (-1)^n$ change de signe et la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

2. $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{5} < 0$ donc $v_{n+1} < v_n$ et la suite (v_n) est décroissante.

97 **1.** On conjecture que la suite (u_n) est décroissante.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{-(n^2 + 9n + 3)}{(n^2+1)((n^2 + 2n + 2)}$ ce qui permet de démontrer la conjecture.

98 On peut par exemple présenter les trois cas suivants :

$u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $\quad u_n = -\frac{2}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $\quad u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{2}{n}$.

99 **1.** La suite (u_n) est décroissante car elle est géométrique de raison plus petite que 1.

2.

```
Traitement et Sortie
Tant que U ⩾ 10^(−7) faire
   U prend la valeur U × 1/2
Fin Tant que
   Afficher U
```

100 **Exercice résolu, voir p. 150 du manuel.**

101 $800 - 1\,000 \neq 640 - 800$, donc l'évolution n'est pas linéaire ; $\frac{800}{1\,000} = 0{,}8$ et $512 \times 0{,}8 \neq 406{,}6$, donc l'évolution n'est pas exponentielle.

102 30 – 10 ≠ 70 – 30, donc l'évolution n'est pas linéaire ; $\frac{30}{10} = 3$ et $30 \times 3 \neq 70$, donc l'évolution n'est pas exponentielle.

103 **1.** (u_n) est arithmétique de raison 500 et de premier terme $u_0 = 13\,000$.

2. (v_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = 35\,000$.

3. ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap06_exercice103.ods (OpenOffice),
733200_chap06_exercice103.xlsx (Excel 2007).

4. Dès la première année.

5. À partir de $n = 9$, ce qui correspond à l'année 2024. Cela se traduit par la baisse, à partir de cette date, de la part de marché de l'entreprise sur la montre GPS.

104 Faux : les valeurs de la suite alternent toujours entre 1 et 2 par construction.

105 Faux : les termes $v_1 = 1$, $v_3 = 21$ et $v_5 = -1$ suffisent à s'en convaincre.

106 Vrai : $u_{69} > u_{68} \geqslant \ldots \geqslant u_{43} \geqslant u_{42}$.

107 Faux : $u_0 = 5$ est strictement plus grand que $u_1 = 0$.

108 **1.** $D_1 = 300 \times 0{,}8 = 240$.

2. a. $D_{n+1} = 0{,}8D_n$.

b. (D_n) est géométrique de raison 0,8 :
$D_n = 300 \times 0{,}8^n$.

3. À partir du 12e jour.

109 **1.** $v_0 = -7$, $v_1 = -7$, $v_2 = -3$, $v_3 = 5$.

2. $v_{n+1} - v_n = 4n + 2 - 2n - 2 + 2n = 4n$.

3. $v_{n+1} - v_n > 0$ donc $v_{n+1} > v_n$ et la suite (v_n) est croissante.

4. a. $v_{225} = 100\,793$.

b. $n = 225$ car $v_{224} = 99\,897$.

110 **1.** (u_n) et (v_n) sont croissantes.

2. $u_n = 5 + 3n$ et $v_n = 3 \times 1{,}1^n$.

3. $n = 39$.

Faire le point

Voir p. 285 du manuel.
Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium.

Revoir des points essentiels

111 $u_n = 7 - 4n$, $u_{18} = -65$.

112 $u_n = -9 + 5n$, $u_{121} = 596$.

113 $v_n = 10 \times 1{,}1^n$, $v_{13} \simeq 34{,}5$ à 0,1 près.

114 $v_n = 300 \times 0{,}7^n$, $v_{28} \simeq 0$ à 0,1 près.

Travaux pratiques

TP1 Évolutions de carrières

Dans ce premier TP, nous étudions conjointement trois suites. La première partie est consacrée à la modélisation de ces suites sur un tableur, puis on étudie les salaires de Bilal, Clara et Damien dans les trois parties suivantes en comparant leurs évolutions.

A. Préparation d'une feuille de calcul

1. ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap06_TP1prof.ods (OpenOffice),
733200_chap06_TP1prof.xls (Excel 2003).

2. `=A2+1`.

3. `=B2+1`.

B. Évolution du salaire de Bilal

1. En 2016, Bilal gagnera 1 537,5 € par mois, et 1 575,94 € par mois en 2017.

2. 1,025.

3. $b_{n+1} = 1{,}025 \times b_n$, donc la suite est géométrique de raison 1,025.

4. `=C2*1,025`.

6. En 2027.

C. Évolution du salaire de Clara

1. En 2016, Clara gagnera 1 540 € par mois, et 1 580 € par mois en 2017.

2. $c_{n+1} = c_n + 40$, donc la suite est arithmétique de raison 40.

3. `=D2+40`.

4. En 2022.

D. Évolution du salaire de Damien

1. `=E2*1,02+20`.

3. b. En 2025.

TP2 Remboursement d'un emprunt

Dans ce TP, nous étudions l'amortissement d'un emprunt. Dans une première partie, les élèves effectuent les calculs « à la main », puis ayant appréhendé les notions, ils construisent à l'aide d'un tableur le tableau d'amortissement. Enfin dans une dernière partie, nous faisons une étude mathématique d'une des suites rencontrées.

A. Calcul des premiers termes des suites

1. a. $I_1 = 300\,000 \times 0{,}03 = 9\,000$.

b. $A_1 = 30\,000 - I_1 = 21\,000$.

c. $C_1 = 300\,000 - A_1 = 279\,000$.

2. a. $I_2 = 279\,000 \times 0{,}03 = 8\,370$.

b. $A_2 = 30\,000 - I_2 = 21\,630$.

c. $C_2 = 279\,000 - A_2 = 257\,370$.

B. Création d'un tableau d'amortissement

1. ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap06_TP2prof.ods (OpenOffice),
733200_chap06_TP2prof.xls (Excel).

2. `=E2*0,03`.

4. `=C3-D3`.

5. `=E2-D3`.

6. Il suffit de sommer le capital restant dû avant annuité et les intérêts dus, on obtient : 89 258,53 €.

C. Étude mathématique de la suite (A_n)

Pour conjecturer, on utiliser les colonnes **F** et **G** pour déterminer les différences successives $A_{n+1} - A_n$ et les quotients successifs $\frac{A_{n+1}}{A_n}$. Les quotients étant égaux à 1,03, on conjecture que (A_n) est géométrique de raison 1,03.

2. a. $C_{n-1} - C_n = A_n$ car l'amortissement du capital est bien la différence entre les deux capitaux restants successifs.

b. $I_n = 0{,}03C_{n-1}$.

c. $A_n + I_n = 30\,000$ pour $1 \leqslant n \leqslant 11$.

d. $A_n = 30\,000 - I_n = 30\,000 - 0{,}03C_{n-1}$.

e. $A_{n+1} - A_n = (30\ 000 - 0{,}03C_n) - (30\ 000 - 0{,}03\ C_{n-1}) = 0{,}03(C_{n-1} - C_n) = 0{,}03A_n$.

f. $A_{n+1} - A_n = 0{,}03A_n$, donc $A_{n+1} = A_n + 0{,}03A_n = 1{,}03A_n$, ce qui prouve que (A_n) est géométrique de raison 1,03.

Pour approfondir

115 **1.** $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{9}(1 - A_n) = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

2. $\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{A_{n+1} - 1}{A_n - 1} = \frac{\frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1}{A_n - 1} = \frac{8}{9}$,

cette suite est donc géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et on a :

$B_n = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \times (A_1 - 1) = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

3. Ainsi $B_n = A_n - 1 = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$ d'où le résultat.

4. À mesure que n devient grand, A_n se rapproche de 1.

116 **1.** $u_1 = 200 \times 1{,}02 + 200 = 404$,

$u_2 = 404 \times 1{,}02 + 200 = 612{,}08$ et $u_3 = 1{,}02u_2 + 200 \approx 824{,}32$.

2. $u_{n+1} = 1{,}02u_n + 200$.

3. a. $v_0 = u_0 + 10\,000 = 10\,200$, $v_1 = u_1 + 10\,000 = 10\,404$ et $v_2 = 10\,612{,}08$.

b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 10\,000 = 1{,}02u_n + 200 + 10\,000$

$= 1{,}02u_n + 10\,200 = 1{,}02(u_n + 10\,000) = 1{,}02v_n$.

(v_n) est géométrique de raison 1,02.

c. $v_n = 10\,200 \times 1{,}02^n$ et $u_n = v_n - 10\,000 = 10\,200 \times 1{,}02^n - 10\,000$.

4. 20 années.

117 **1.** $R_0 = 1$.

2. $S_1 = 106$, $P_1 = 102$ et $R_1 = \frac{106}{102} \approx 1{,}04$ à 10^{-2} près.

3. ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap06_exercice117_correction.ods (OpenOffice),

733200_chap06_exercice117_correction.xls (Excel)

4. L'année de rang $n = 34$.

5. Pendant 97 années.

6. $R_{212} \approx 0{,}2$. Ce qui signifie que vers 2010 seulement 20 % de la population aurait pu être nourri grâce à la production agricole. L'hypothèse de Malthus était donc erronée.

118 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap06_exercice118_correction.ods (OpenOffice),

733200_chap06_exercice118_correction.xls (Excel)

1. a. $r_1 = 0{,}95r_0 + 200 = 38\,200$, $r_2 = 0{,}95r_1 + 200 = 36\,490$.

b. Pour passer de r_n à r_{n+1}, on effectue une baisse de 5 % soit une multiplication par 0,95, puis on ajoute 200, d'où le résultat.

2.a. $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{r_{n+1} - 4000}{r_n - 4000} = \frac{0{,}95r_n - 3800}{r_n - 4000} = 0{,}95$, cette suite est donc géométrique de raison 0,95 et de premier terme 36 000.

b. De plus on a : $s_n = 36\ 000 \times (0{,}95)^n$.

Ainsi $r_n = 4\ 000 + s_n = 4\ 000 + 36\ 000 \times (0{,}95)^n$.

c. $r_{n+1} - r_n = 36\ 000 \times (0{,}95)^{n+1} - 36\ 000 \times (0{,}95)^n$

$= 36\ 000 \times (0{,}95 - 1) \times (0{,}95)^n = -1\ 800 \times (0{,}95)^n$,

donc la suite est décroissante car $r_{n+1} \leqslant r$ pour tout n.

d. La suite (r_n) étant décroissante, la quantité de déchets rejetés diminue d'une année sur l'autre.

e. $r_4 \approx 33\,322$ tonnes.

3. En 2018 car $r_7 \approx 29\,140$.

119 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap06_exercice119_correction.ods (OpenOffice),

733200_chap06_exercice119_correction.xls (Excel)

1. $U_1 = 0{,}8U_0 + 40 = 160$, $U_2 = 0{,}8U_1 + 40 = 168$.

2.

	A	B
1	n	Un
2	0	150
3	1	160
4	2	168
5	3	174,4
6	4	179,52
7	5	183,616
8	6	186,8928
9	7	189,51424
10	8	191,611392
11	9	193,289114
12	10	194,631291
13	11	195,705033
14	12	196,564026
15	13	197,251221
16	14	197,800977
17	15	198,240781
18	16	198,592625
19	17	198,8741
20	18	199,09928
21	19	199,279424
22	20	199,423539
23	21	199,538831
24	22	199,631065
25	23	199,704852
26	24	199,763882
27	25	199,811105
28	26	199,848884
29	27	199,879107
30	28	199,903286
31	29	199,922629

3. La suite semble être croissante.

4. Les valeurs de la suite semblent se rapprocher de 200 sans jamais dépasser cette valeur.

5. $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 200}{U_n - 200} = \frac{0{,}8U_n - 160}{U_n - 200} = 0{,}8$.

Cette suite est donc géométrique de raison 0,8 et de premier terme – 50.

6. On a donc :

$V_n = -50 \times (0{,}8)^n$ et $U_n = 200 - 50 \times 0{,}8^n$.

7. $U_{n+1} - U_n = -50 \times (0{,}8)^{n+1} + 50 \times (0{,}8)^n$

$= 50 \times (-0{,}8 + 1) \times (0{,}8)^n = 10 \times (0{,}8)^n$.

La suite est donc croissante car $U_{n+1} \geqslant U_n$ pour tout n.

8. Non car il n'y aura pas plus de 200 vélos disponibles *via* la société Vélibre. En revanche, disposer de plus d'emplacements peut s'avérer être judicieux car certains lieux servent plutôt à déposer des vélos qu'à en prendre.

120 **1.** $P_1 - P_0 = 20\,000$, $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_0) = 10\,000$ et $P_3 - P_2 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) = 5\,000$. Donc $P_2 = 70\,000$ et $P_3 = 75\,000$.

2. a. $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$, donc (U_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = P_1 - P_0 = 20\,000$. Ainsi $U_n = \frac{20\ 000}{2^n}$.

$$V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1} - P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = P_{n+2} - P_{n+1} - \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n)$$
$$= 0.$$

La suite (V_n) est donc constante.

c. Pour tout entier naturel n, $V_n = V_0$.

Donc $Vn = P_1 - \frac{1}{2}P_0$, soit $V_n = 40\,000$ pour tout n.

d. $V_n - U_n = -\frac{1}{2}P_n + P_n = \frac{1}{2}P_n$ donc $P_n = 2(V_n - U_n)$.

On déduit que $P_n = 2 \times \left(40\ 000 - \frac{20\ 000}{2^n}\right) = 40\ 000 \times \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$.

121 **A. Étude d'une suite**

1. $u_1 = 740$ et $u_2 = 644$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0{,}6u_n + 200 - 500 = 0{,}6u_n - 300$
$= 0{,}6(u_n - 500) = 0{,}6v_n$.

$v_0 = u_0 - 500 = 400$.

(v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 400$.

b. Comme $v_0 > 0$ et $0 < 0{,}6 < 1$, (v_n) est décroissante et de même pour (u_n).

c. $v_n = 400 \times 0{,}6^n$ et $u_n = v_n + 500 = 400 \times 0{,}6^n + 500$.

d. $n = 12$.

B. Application

1. $a_0 = 900$ et $a_1 = 0{,}8 \times a_0 + (1\,000 - a_0) \times 0{,}2 = 740$.

2. $a_2 = 0{,}8 \times a_1 + (1\,000 - a_1) \times 0{,}2 = 644$.

3. $0{,}8a_n$ correspond au nombre de clients restant de l'année n et $0{,}2 \times (1\,000 - a_n)$ est le nombre de clients de B venant l'année $n + 1$ chez A.

4. $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 200 - 0{,}2a_n = 0{,}6a_n + 200$.

5. Étant donné les relations de récurrence et le fait que $a_0 = u_0$ on déduit que $a_n = u_n$ pour tout entier n. On peut conjecturer que le marché va évoluer vers une répartition égalitaire puisque les valeurs de a_n se rapprochent de 500 lorsque n augmente.

122 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap06_exercice122_correction.ods (OpenOffice), 733200_chap06_exercice122_correction.xls (Excel)

1. $u_2 = u_0 + u_1 = 2$, $u_3 = u_1 + u_2 = 3$.

2.

A	B
n	Un
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765
20	10946
21	17711
22	28657
23	46368
24	75025
25	121393

25	121393
26	196418
27	317811
28	514229
29	832040
30	1346269
31	2178309
32	3524578
33	5702887
34	9227465
35	14930352
36	24157817
37	39088169
38	63245986
39	102334155
40	165580141
41	267914296
42	433494437
43	701408733
44	1134903170
45	1836311903
46	2971215073
47	4807526976
48	7778742049
49	12586269025

3. a.

A	B	C
n	Un	Un+1/Un
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	1,5
4	5	1,66666667
5	8	1,6
6	13	1,625
7	21	1,61538462
8	34	1,61904762
9	55	1,61764706
10	89	1,61818182
11	144	1,61797753
12	233	1,61805556
13	377	1,61802575
14	610	1,61803714
15	987	1,61803279
16	1597	1,61803445
17	2584	1,61803381
18	4181	1,61803406
19	6765	1,61803396
20	10946	1,618034
21	17711	1,61803399
22	28657	1,61803399
23	46368	1,61803399
24	75025	1,61803399
25	121393	1,61803399

b. Les valeurs se stabilisent très vite autour du nombre d'or, environ 1,618.

123 **1.** $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = -1$, $v_3 = 2$ et $v_4 = \frac{1}{2}$.

2. On remarque que la suite (v_n) semble périodique de période 3.

3. $v_{n+2} = 1 - \frac{1}{v_{n+1}} = 1 - \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{v_n - 1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n}$

et $v_{n+3} = 1 - \frac{1}{v_{n+2}} = 1 - (1 - v_n) = v_n$.

124 Voici les parts respectives : $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$, $\frac{115}{3}$.

Le total est de 100.

Comment obtenir la solution ?

Soit r la raison de la suite et p le nombre de départ. Les parts sont p, $p + r$, $p + 2r$, $p + 3r$ et $p + 4r$.

Le total vaut $5p + 10r$ qui doit être égal à 100, soit $p + 2r = 20$.

Les deux plus petites parts sont p et $p + r$. Leur somme est $2p + r$.

La somme des trois plus grandes vaut $3p + 9r$.

La somme des deux plus petits est le septième de la somme des trois plus grandes :

$$2p + r = \frac{(3p + 9r)}{7}.$$

Donc $3p + 9r = 7 \times (2p + r) = 14p + 7r$.

D'où : $2r = 11p$, et avec $p + 2r = 20$ on obtient $12p = 20$, soit $p = \frac{5}{3}$ et $r = \frac{55}{6}$.