CHAPITRE 5

Applications de la dérivation

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	On traite quelques problèmes d'optimisation.

B Notre point de vue

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à utiliser la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction et pour déterminer ses extremums.
Pour commencer, nous proposons les **activités 1** et **2**, qui permettent de faire le lien entre signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de la fonction f. On retrouve ces notions dans la première page de cours.
Il nous semble utile que les élèves étudient au moins une de ces activités avant de pouvoir énoncer les propriétés du cours.
À noter que, pour aider les élèves à comprendre l'énoncé de la propriété permettant d'obtenir le signe de la dérivée d'une fonction à partir du sens de variation de cette fonction, nous avons proposé dans le cours une idée graphique de la démonstration de cette propriété. On ne peut pas aller plus loin puisque la notion de limite n'est pas au programme.
Les **activités 3** et **4** permettent de découvrir comment utiliser la dérivée d'une fonction pour déterminer ses extremums. Ces notions sont reprises dans la deuxième page de cours.
De nombreux exercices proposent l'étude du sens de variation d'une fonction ou la recherche de ses extremums dans un contexte économique : fonction de coût, fonction bénéfice, fonction de demande… Ils font appel à des fonctions polynômes de degré inférieur à 3 ou à des fonctions rationnelles.
L'utilisation des **TICE** a été développée à plusieurs endroits dans le chapitre :
– les calculatrices sont utilisées pour émettre des conjectures ou pour vérifier la cohérence de résultats ;
– nous proposons l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur pour observer les variations de courbes (par exemple dans l'**activité 1**, l'**exercice 55** ou le **TP1**) ;
– conformément au programme, pour certains problèmes d'optimisation, un logiciel de calcul formel peut faciliter le calcul de la dérivée d'une fonction et favoriser la mise en place d'une démarche d'investigation de la part des élèves.

Les notions abordées dans le chapitre 5

- Signe de la dérivée et variations d'une fonction
- Extremum d'une fonction

C Réactiver les savoirs

Voir manuel page 285 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Signe des nombres dérivés

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr :
733200_chap05_activite1.url
Fichier associé sur le manuel numérique Premium :
733200_chap05_activite1.ggb (GeoGebra)

Cette activité permet de déterminer le signe d'un nombre dérivé par lecture graphique et de choisir sur quelle portion de la courbe il faut se placer pour que le nombre dérivé soit de signe fixé.

a. f est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
b. $f'(-1)=4$; $f'(1)=0$ et $f'(2)=-2$.
2. a. b. Pour compléter le tableau, on peut déplacer le point M et lire la pente de la tangente sur le fichier fourni.

Abscisse de M	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1
Coefficient directeur de la tangente en M	6	5	4	3	2	1	0

Abscisse de M	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Coefficient directeur de la tangente en M	– 1	– 2	– 3	– 4	– 5	– 6

c. On a $f'(x)>0$ pour $x<1$ et $f'(x)<0$ pour $x>1$.
d. f est croissante lorsque $f'(x)>0$ et décroissante lorsque $f'(x)<0$.
3. a. $f'(x)=-2x+2$.
b. $f'(-2)=6>0$, … , $f'(4)=-6<0$.
c. $f'(x)>0$ équivaut à $-2x+2>0$, soit $x<1$.
De même, $f'(x)<0$ pour $x>1$.
d. $-2x+2$ est positif sur $]-\infty\,;1]$ et négatif sur $[1\,;+\infty[$, ce qui est cohérent avec les réponses précédentes.

Activité 2 Courbes d'une fonction et de sa dérivée

Fichier associé sur www.bordas-indice.fr :
733200_chap05_activite2.url
Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :
733200_chap05_activite2.ggb (GeoGebra)

Les courbes données sur le manuel permettent de traiter la question 1 de l'activité sans utiliser d'ordinateur. Le fichier proposé permet une présentation à la classe en vidéo-projection de la question 2. Il permet de montrer aux élèves que, même lorsque la fonction f varie, il y a toujours un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée.

1. a. f est croissante sur $[-2,5\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;2]$ et croissante sur $[2\,;3,5]$.
b. f' est positive sur $[-2,5\,;-1]$, négative sur $[-1\,;2]$ et positive sur $[2\,;3,5]$.
c. f est croissante lorsque $f'(x)\geqslant 0$ et décroissante lorsque $f'(x)\leqslant 0$.
2. En faisant varier les autres curseurs, on peut faire apparaître plusieurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}f'$. Pour chaque position du curseur, on peut alors confirmer la conjecture faite précédemment entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

Activité 3 Des hauts et des bas

L'objectif de cette activité est de faire observer aux élèves que les extremums d'une fonction correspondent aux valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe.

1. b.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-6{,}75$	$\nearrow$	

f semble admettre un minimum en $x=3$.
2. a. $f'(x)=x^3-3x=x^2(x-3)$.
b.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x-3$		–	|	–	0	+	
x^2		+	0	+	|	+	
$x^2(x-3)$		–	0	–	0	+	

c. En $x=3$, $f'(x)$ s'annule et change de signe, cela correspond à un minimum.
En $x=0$, $f'(x)$ s'annule mais ne change pas de signe.

Activité 4 Une épidémie galopante

Cette activité permet une première approche d'un problème d'optimisation. Dans la question 2, l'élève découvre comment utiliser la dérivée pour obtenir la valeur exacte du réel permettant d'atteindre un maximum.

1. a. Au bout de 30 jours, la maladie cesse de progresser.
b. Le nombre maximal de malades est environ 13 500.
2. a. $f'(t)=90t-3t^2=3t(30-t)$.
b. Pour $a=30$, la dérivée s'annule ; elle est positive sur $]0\,;30]$ et négative sur $[30\,;45]$.
c. f est maximale en $t=a$.
3. Il faut chercher une valeur pour laquelle la dérivée s'annule en changeant de signe.

E Exercices

Pour démarrer

1 f' est positive sur $\mathbb{R}$.

2 f' est négative sur $[2 ; +\infty[$.

3 **1.** f' est négative sur $]-\infty ; 1]$.

2. f' est positive sur $[1 ; +\infty[$.

4

Valeurs de x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	

5 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

6 **1.** f est croissante sur $[-3 ; 3]$.

2. $f'(x)$ est positif sur $[-3 ; 3]$.

7

Valeurs de x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variation de f		↗	7	↘	3	↗	

8 f est décroissante sur $[-5 ; +\infty[$.

9 $f'(x) = x^2 + 1$ est positif sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

10 **1.** f est croissante sur $]-\infty ; 2]$.

2. f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

11 Le tableau de variation de f est :

Valeurs de x	-3		1		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	-2	↗	3	↘	-3

12 **1.** f est décroissante sur $]-\infty ; -2]$.

2. f est croissante sur $[-2 ; 1]$.

3. f est décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

13 Le tableau de variation de f est :

Valeurs de x	-3		-1		1		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variation de f	-4	↗	3	↘	-2	↗	2

14 **1.** f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(x) = -3$ strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

3. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

15 **1.** La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f'(x) = 2x$; $2x$ est négatif sur $]-\infty ; 0]$ et positif sur $[0 ; +\infty[$.

3. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

16 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

17 **1.** $f'(x) = -2x$. $-2x$ est positif sur $]-\infty ; 0]$ et négatif sur $[0 ; +\infty[$.

2.

Valeurs de x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f		↗	3	↘	

18 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 4$, $f'(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$.

2. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

19 **a. Faux**.

b. Vrai.

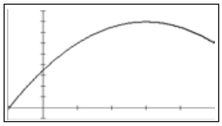
c. Faux.

20 **1.**

Valeurs de x	-1		3		5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	0	↗	80	↘	60

2. La dérivée s'annule en 3 en changeant de signe.
f admet donc un maximum en $x = 3$; ce maximum est $f(3) = 80$.

3.



21 **1.** f ne possède pas d'extremum local au point d'abscisse -1, car la dérivée s'annule mais ne change pas de signe.

2. f possède un extremum local au point d'abscisse 2, car la dérivée s'annule en changeant de signe.

22 Le tableau de variation de f est :

Valeurs de x	-2		1		3
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	0,5	↗	2	↘	0

2. Sur $[-2 ; 3]$, le maximum de f est 2 et il est atteint en $x = 1$.
Sur $[-2 ; 3]$, le minimum de f est 0 et il est atteint en $x = 3$.

23 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

24 Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à -2, donc $f(x) < 0$ pour tout réel x.

25 **1.**

Valeurs de x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		−	0	+	
Variation de f		↘	5	↗	

2. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à 5, donc $f(x) \geqslant 5$ pour tout réel x.

26 f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Valeurs de x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	
Variation de f	↗		0		↗

2. Puisque f s'annule en $x = -2$, alors sur $[-2\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant f(-2)$ soit $f(x) \geqslant 0$.

POUR S'ENTRAÎNER

27 **1.** f est croissante sur $[-1\,;1]$, décroissante sur $[1\,;4]$ et croissante sur $[4\,;6]$.

2.

Valeurs de x	-1		1		4		6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

28 **1.** f est décroissante sur $[-2\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;2]$.

2. f' est négative sur $[-2\,;-1]$, positive sur $[-1\,;1]$ et négative sur $[1\,;2]$.

29 **Exercice résolu, voir p. 116 du manuel.**

30 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

31 **1.** Proposition fausse.

2. « Si pour tout x de l'intervalle $[3\,;4]$, $f'(x) \geqslant 0$, alors $f(3) \leqslant f(4)$. » **Vrai.**

32 **1. Vrai** : le maximum est -2.

2. Faux : $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,;3]$.

33 **1. Faux**, f est croissante $[1\,;4]$.

2. Vrai, f est croissante sur $[1\,;4]$.

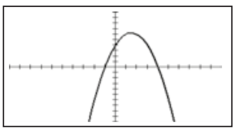
34 **1.** $f'(x) = -2x + 3$.

2. $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et négatif sur $[1{,}5\,;+\infty[$.

3.

Valeurs de x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	↗		6,25		↘

4.



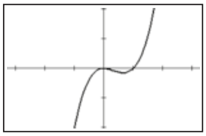
35 **1.** $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.

2. f' est positive sur $]-\infty\,;0]$, négative sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ et positive sur $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

3.

Valeurs de x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	↗		0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	

4.



36 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 1$.

2. $f'(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

37 **Exercice résolu, voir p. 117 du manuel.**

38 **1.** f' est positive sur $[-1\,;2]$ et négative sur $[2\,;3]$.

2. f est croissante sur $[-1\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;3]$.

39 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap05_exercice39_correction.alg (Algobox)

1. a. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. f est constante sur $\mathbb{R}$.

c. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(x) = 3ax^2$, le signe de a permet de déterminer les variations de f.

40 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

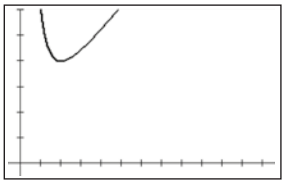
733200_chap05_exercice40_correction.xws (Xcas)

1. $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$.

2. $x^2 + 2x + 4$ est toujours positif, x^3 est positif sur $]0\,;+\infty[$. Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x - 2$.

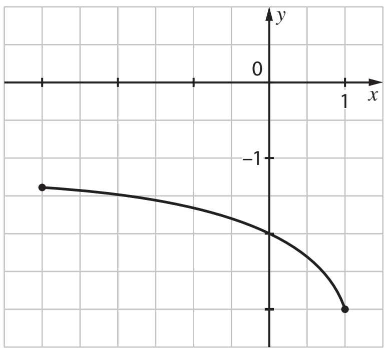
Ainsi f est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$.

3.



41 **1.** $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$, f est donc décroissante sur $[-3\,;1]$.

2.



42 **Exercice résolu, voir p. 118 du manuel.**

43 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

44 **1.** $f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $y = 9x$.

3. $f(x) - 9x = x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$; la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $(\mathscr{T})$ sur $]-\infty\,;9]$ et au-dessus de $(\mathscr{T})$ sur $[9\,;+\infty[$.

45 **1.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

2. $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs ; f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

46 **1.** $f'(x) = \frac{-6\,264}{(x+8)^2}$. $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[10\,;100]$.

2. Contrairement aux véhicules utilitaires légers, les poids lourds émettent de moins en moins de particules nocives lorsque leur vitesse augmente.

47 **Exercice résolu, voir p. 119 du manuel.**

48 **1.** $f'(p) = p^2 - 40p + 76$.

2. f est croissante sur $[0\,;2]$, décroissante sur $[2\,;38]$ et croissante sur $[38\,;+\infty[$.

3. Dans un contexte économique classique, plus le prix augmente plus la quantité demandée diminue ; sur l'intervalle $[2\,;38]$, f peut être une fonction de demande. En fait, à partir de $p = 34{,}54$, $f(p)$ devient négatif, ce qui ne pourrait plus correspondre à une quantité demandée.

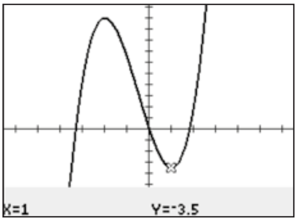
49 **1.** Proposition vraie.

2. « Si $f(2) > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. » Cette réciproque est fausse.

50 $f'(x) = \frac{-4}{(2-x)^2}$, affirmation vraie.

51 $g(x) = f(x) + 1$, affirmation vraie.

52 **1. a.**



b. Par lecture graphique, le minimum de f semble être égal à $-3{,}5$ et être atteint en $x = 1$.

2. a. $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

Ce polynôme admet deux racines : -2 et 1 ; il est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines et négatif à l'intérieur.

b. Le minimum de f sur $[-2\,;2]$ est égal à $f(1)$, c'est-à-dire $-3{,}5$.

53 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$.

f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $\left[-2\,;\frac{4}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

2.

Valeurs de x	-3		-2		$\frac{4}{3}$		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	6	↗	12	↘	$-\frac{176}{27}$	↗	-4

Le maximum de f sur $[-3\,;2]$ est atteint en $x = -2$; ce maximum est égal à 12.

54 **1.** f semble être croissante sur $\mathbb{R}$.

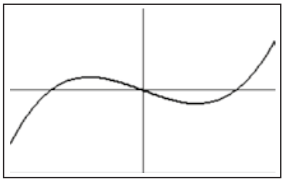
2. $f'(x) = 3(x^2 - 0{,}04)$; f est croissante sur $]-\infty\,;-0{,}2]$, décroissante sur $[-0{,}2\,;0{,}2]$ et croissante sur $[0{,}2\,;+\infty[$.

La fenêtre de construction du graphique ne permet donc pas de voir le sens de variation de f pour x appartenant à $[-0{,}2\,;0{,}2]$.

3. a. f admet un maximum local égal à 0,016 et un minimum local égal à $-0{,}016$.

b. On peut choisir une fenêtre où x est entre $-0{,}5$ et $0{,}5$, y entre $-0{,}1$ et $0{,}1$.

c.



55 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap05_exercice55.xlsx (Excel),

733200_chap05_exercice55.ods (OpenOffice).

1. a. Formule dans la cellule **A3** : **=A2+0,5**.

b. Formule **F2** dans la cellule **B2** : **=9*A2^4+28*A2^3**.

c. Le minimum semble être égal à $-85{,}9375$.

2. a. $f'(x) = 36x^3 + 84x^2$.

b. $f'(x) = 12x^2(3x + 7)$.

Valeurs de x	-4		$\frac{-7}{3}$		0		2
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variation de f	512	↘	$-\frac{2\,401}{27}$	↗	0	↗	368

c. Le minimum de f sur $[-4\,;2]$ est $-\frac{2\,401}{27}$.

56 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

57 **1.** $C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7\,200}{x}$.

2. a. $C'_M(x) = 2 - \frac{7\,200}{x^2}$.

b. $C'_M(x) = \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$.

c. C_M est décroissante sur $[30\,;60]$ et croissante sur $[60\,;120]$.

3. Le coût est minimal pour 60 repas servis.

58 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***

733200_chap05_exercice58.xws (Xcas)

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

2. $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$.

Valeurs de x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		↗	0	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	

3. f admet un maximum local égal à 0 pour $x = -1$ et un minimum local égal à $-\dfrac{256}{27}$ pour $x = \dfrac{5}{3}$.

59 ***Fichier associé sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap05_exercice59_correction.alg (Algobox)

1. $f'(x) = 4ax^3 - 2ax = 2ax(2x^2 - 1)$.

Si $a > 0$:

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		↘		↗		↘		↗	

Si $a < 0$:

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f		↗		↘		↗		↘	

2.

Traitement et Sortie
Si $\boldsymbol{a < 0}$
Alors afficher « f admet un maximum »
Sinon afficher « f admet un minimum »
Fin Si

60 **1.** Proposition fausse, il faut aussi que la dérivée change de signe.

2. La réciproque « Si f admet un extremum local en 1, alors $f'(1) = 0$ » est vraie.

61 Faux, par exemple la fonction $f(x) = x^3$ n'a ni maximum, ni minimum.

62 $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

1. Vrai, $f(0) = -1$.

2. Faux : le minimum est atteint pour $x = 0$.

63 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(2) = 2^3 + 2 - 10 = 8 + 2 - 10 = 0$.

3. f est négative sur $]-\infty\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$.

64 **1.** $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.

f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. Sur $]-\infty\,;1]$ f admet un minimum égal à 16, donc f est positive.

3. a. $f(3) = -3^3 + 3 \times 3 + 18 = -27 + 9 + 18 = 0$.

b. f est positive sur $[1\,;3]$ et négative sur $[3\,;+\infty[$.

c. $x^3 \leqslant 3x + 18$ équivaut à $-x^3 + 3x + 18 \geqslant 0$.

D'après l'étude précédente, c'est sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$ que cette inégalité est vérifiée.

65 **Exercice corrigé, voir p. 285 du manuel.**

66 **1.** $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f(1) = 0$.

3. f est négative sur $]0\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.

4. a. Pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, on a $f(x) \leqslant 0$ donc $x^2 \leqslant \dfrac{1}{x}$.

b. Sur $]0\,;1]$, la courbe représentant la fonction carré est située en dessous de la courbe représentant la fonction inverse.

67 **1. Faux**, puisque f est décroissante sur $[-3\,;-1]$.

2. Vrai, puisque le minimum de f sur $[-3\,;2]$ est strictement positif.

68 **1.** $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.

2. f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

69 **1.** $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.

f est croissante sur $]-\infty\,;0]$, décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

2. Le minimum de f sur $[0\,;+\infty[$ est $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{23}{27}$.

3. f est donc positive sur $[0\,;+\infty[$.

70 **1.** $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

f est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2. Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ est $f(2) = 4$.

Faire le point

Voir manuel p. 285. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

Revoir des points essentiels

71

Valeurs de x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variation de f	2	↘	-2	↗	2	↘	-2
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

72 **a.** $f'(x) = -2x + 4$.

Valeurs de x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f		↗	4	↘	

b. $f'(x) = \dfrac{-22}{(x-7)^2}$, f est décroissante sur $]7\,;+\infty[$.

Travaux pratiques

TP 1 Coût, coût moyen et coût marginal

L'objectif de ce TP est d'utiliser un logiciel de géométrie pour observer graphiquement les liens entre coût total, coût marginal et coût moyen au voisinage de la quantité qui intéresse l'entreprise, celle où le coût moyen est minimal.

Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :
733200_chap05_TP1_Correction.ggb,
733200_chap05_TP1_prof.ggb.

A. Courbe représentative du coût moyen

2. b. Le coût moyen semble minimal pour x environ égal à 7,5 et ce minimum est environ égal à 18,75.

B. Courbe représentative du coût

1. a. et **b.** Voir Fiche d'accompagnement TICE.

1. c. Le coefficient directeur minimal de la droite (OM) est environ 18,75 pour une abscisse de M d'environ 7,5.

d. La droite (OM_0) semble être la tangente à la courbe représentative de C (courbe verte) au point M_0.

2. a. Le coefficient directeur de la droite (OM) est :

$$\frac{C(x)-C(0)}{x-0}=C_M(x).$$

b. Le coefficient directeur de (OM) diminue lorsque x varie de 0 à x_0, puis augmente lorsque x varie de x_0 à 15.

c. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 est environ 18,75. C'est la même valeur que celle trouvée pour le coût moyen minimal, ce qui n'est pas étonnant d'après **2. a**.

C. Courbe représentative du coût marginal

2. La courbe représentative du coût marginal est située sous celle du coût moyen pour les valeurs de x inférieures à x_0. C'est le contraire pour les valeurs de x supérieures à x_0.

D. Démonstration des conjectures

1. $C'_M(x)=\dfrac{C'(x)\times x-C(x)}{x^2}$.

$C'(x)\times x - C(x) = 0$ équivaut à $C'(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, soit $C'(x) = C_M(x)$.

D'où $C_m(x) = C_M(x)$.

Remarque : les élèves peuvent dans un premier temps travailler avec les expressions des fonctions coût moyen et coût marginal de cet exercice, puis il sera intéressant qu'ils arrivent à démontrer cette propriété dans le cas général comme rédigé précédemment.

2. Lorsque le coût moyen est minimal, le coût moyen d'un kilogramme, lorsque x kilogrammes sont fabriqués, est égal au coût marginal.

Remarque : on peut aussi demander aux élèves de résoudre l'équation $C_m(x) = C_M(x)$ qui est une équation simple du second degré.

TP2 Élasticité d'une fonction demande

L'objectif de ce TP est d'utiliser un tableur pour calculer des taux de variation, découvrir la notion d'élasticité et faire des conjectures. On démontre ensuite ces conjectures.

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique Premium :

733200_chap05_TP2_Correction. xlsx (Excel), 733200_chap05_TP2_Correction.ods (OpenOffice).

A. Premiers calculs

1. Le prix a baissé de 1 %.

2. Le nombre de places vendues a augmenté d'environ 2,9 %.

3. L'élasticité de la demande est environ égale à – 2,857 lorsque le prix passe de 50 € à 49,5 €.

4. L'élasticité de la demande est environ égale à – 2,750 lorsque le prix passe de 49,5 € à 49 €.

B. Recherche à l'aide d'un tableur

4. On peut observer que les taux de variation du prix et de la demande sont égaux en valeur absolue lorsque p est situé entre 33,5 et 33. On observe alors que l'élasticité est proche de – 1.

5. b. On observe que la recette est maximale pour p situé entre 33,5 et 34.

Ces valeurs sont très proches de celles obtenues dans la question précédente.

C. Étude mathématique

1. On peut utiliser la colonne **G** pour faire afficher les images par f des nombres de 50 à 20.

2. a. $R(p) = pf(p) = -400p^2 + 27\,000\,p$.

b. La recette est maximale pour $p = 33{,}75$.

3. a. $\varepsilon(p)=\dfrac{p\times(-400)}{27\,000-400p}$ soit $\varepsilon(p)=\dfrac{2p}{2p-135}$.

b. Comme $0 \leqslant p \leqslant 50$, $\varepsilon(p)$ est strictement négatif.

4. a. $\varepsilon(p) = -1$ équivaut à $p = 33{,}75$.

b. On observe que le prix qui maximalise la recette a l'air d'être le même que celui qui permet que l'élasticité soit égale à – 1.

Remarque : démonstration de l'affirmation de la question C.3. :

Le rapport $\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ est proche de $f'(p)$ lorsque p est proche de 0. De plus le rapport donné comme définition de l'élasticité est égal à :

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}\times\frac{p}{h}=\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\times\frac{p}{f(p)}.$$

Donc lorsque h tend vers 0, ce produit est proche de :

$f'(p)\times\dfrac{p}{f(p)}$, c'est-à-dire $\dfrac{pf'(p)}{f(p)}$.

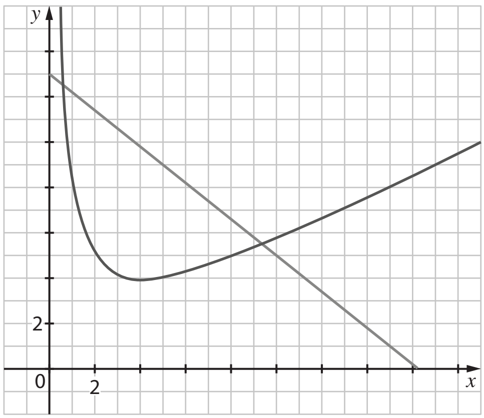
Pour approfondir

73 **a.** $f'(x)=0{,}5-\dfrac{8}{x^2}$.

b. $f'(x)=\dfrac{0{,}5(x^2-16)}{x^2}=\dfrac{0{,}5(x+4)(x-4)}{x^2}$.

Sur $]0\,;+\infty[$ $f'(x)$ a le même signe que $x-4$.

2. f est décroissante sur $]0\,;4]$ et croissante sur $[4\,;+\infty[$.



3. b. Par lecture graphique, l'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle fabrique et vend entre 0,7 et 9,3 hectolitres.

4. $p(x) = f(x)$ équivaut à $\frac{-1,3x^2 + 13x - 8}{x} = 0$, soit $x = 0,659$ ou $x = 9,341$ (à 0,001 près).

74 **1.** $C'(v) = 0,06 - \frac{150}{v^2} = \frac{0,06(v^2 - 2500)}{v^2}$.

La fonction C est décroissante sur [20 ; 50] et croissante sur [50 ; 130].

2. a. Il faut rouler à 50 km·h^{-1}.

b. La consommation minimale est 6 litres pour 100 km.

75 **1.** Il faut $0 < 2x < 12$, soit $x \in]0 ; 6[$.

2. $V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

3. $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$.

V est croissante sur]0 ; 2] et décroissante sur [2 ; 6[. Le volume est donc maximal pour $x = 2$ et ce volume maximal est égal à $V(2)$, soit 128 cm^3.

76 **1.** $f'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.

La fonction f est croissante sur [0 ; 6] et décroissante sur [6 ; 10]. La quantité produite est maximale pour $x = 6$, c'est-à-dire 600 heures.

77 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :***

733200_chap05_exercice77_Correction.xlsx (Excel),
733200_chap05_exercice77_Correction.ods (OpenOffice).

A. Étude des coûts donnés par le tableur

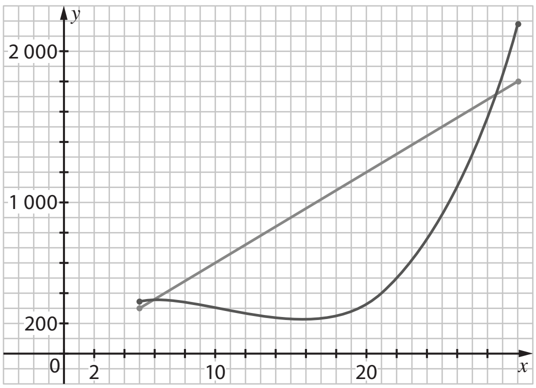
1. Formule dans la cellule **A3** : **=A2+5**.

2. Formule **F2** : **=A2^3/3-11*A2^2+100*A2+72**.

B. Étude graphique du bénéfice

1. $R(x) = 60x$.

2.



3. Graphiquement, la quantité (en kg) à produire et à vendre pour réaliser un bénéfice doit appartenir à [6 ; 28].

C. Étude algébrique du bénéfice

1. $B(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72$.

2. $B'(x) = -x^2 + 22x - 40 = -(x - 2)(x - 20)$.

Sur [5 ; 20], $B'(x) \geqslant 0$ donc B est croissante.

Sur [20 ; 30], $B'(x) \leqslant 0$ donc B est décroissante.

3. Pour réaliser le bénéfice maximal, il faut produire et vendre 20 kg de produit.

4.

x	15	20	24
$B(x)$	678 ↗	$\frac{2\,584}{3}$	↘ 696

Le bénéfice minimal envisageable est de 678 €.

78 **1.** $f'(x) = 3x(x - 2)$.

2. f est croissante sur [–1 ; 0], décroissante sur [0 ; 2] et croissante sur [2 ; 3].

x	–1		0		2		3
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variation de f	–3	↗	1	↘	–3	↗	1

3. $y = -3x + 2$.

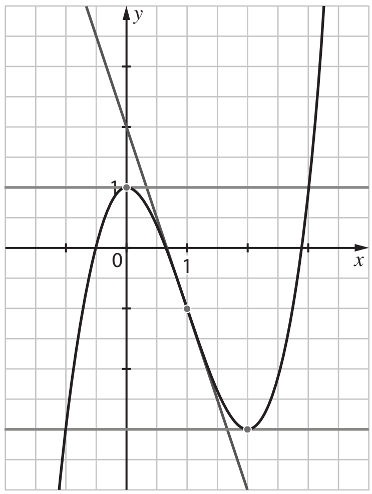
4. a. $g'(x) = 3(x - 1)^2$; g est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $g(1) = 0$.

c. g est négative sur $]-\infty ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$.

d. Sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(x)$ supérieur à $-3x + 2$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$.

5.



79 ***Fichier associé sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap05_exercice79_Correction.ggb (GeoGebra).

1. Pour $a = -5$: f est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{5}{3} ; 1\right]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Pour $a = 5$ et $a = \frac{1}{3}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a. Voir fichier associé.

b. f est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a \geqslant 0,3$ environ. Sinon, elle est croissante, puis décroissante et à nouveau croissante.

3. f est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $f'(x) = 3x^2 + 2x + a$ est toujours positif, c'est-à-dire lorsque $4 - 12a \leqslant 0$, soit $a \geqslant \frac{1}{3}$.

80 **1.** Le sommet ayant pour coordonnées (0 ; 20), la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, son équation est de la forme $y = ax^2 + 20$.

En utilisant le point $B(20\ ;\ 0)$, on trouve $0 = 400a + 20$ donc $a = -\frac{20}{400} = -\frac{1}{20}$.

Une équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{20}x^2 + 20$.

2. a. Aire MNPQ = MN × MP = $2x\left(-\frac{1}{20}x^2 + 20\right)$,

soit $A(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 40x$.

b. $A'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + 40$.

L'aire est maximale pour $x = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

3. La longueur de la poutre permettant que l'aire soit maximale est $2 \times \frac{20}{\sqrt{3}}$, soit environ 23,09 m.

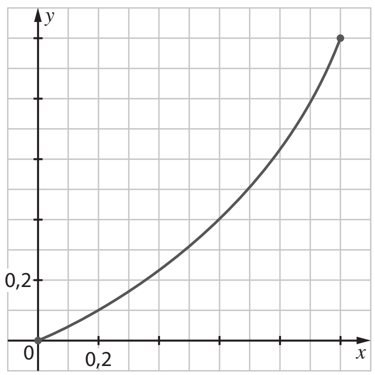
81 **1. a.** $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

b. $f'(x) = 1{,}5x^2 + 0{,}5$. $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

c. $f(x) - x = 0{,}5x^3 - 0{,}5x$.

On peut vérifier que sur $[0\ ;\ 1]$ $f(x) - x \leqslant 0$.

d.



e. La fonction f vérifie les quatre propriétés donc la courbe $\mathscr{C}$ est une courbe de Lorenz.

2. On construit la courbe et on lit l'antécédent de 0,6 ; on trouve environ 0,76. Cela signifie qu'environ 76 % des salariés les moins bien rémunérés se partagent 60 % de la masse totale des salaires de l'entreprise.

82 **1. a.** $f'(x) = 3(1 + x)^2$.

b. $y = 3x + 1$.

2. a. $g(x) = x^3 + 3x^2$; $g'(x) = 3x(x + 2)$.

g est croissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$, décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Le minimum de g sur $[-2\ ;\ 2]$ est $g(0) = 0$, donc g est positive sur $[-2\ ;\ 2]$.

b. Sur $[-2\ ;\ 2]$, $g(x) \geqslant 0$ donc la courbe est au-dessus de la tangente.

c. $(1 + x)^3 \geqslant 1 + 3x$ sur $[-2\ ;\ 2]$.

83 **1.** On a $4x + 2x + 2y = 10$, soit $y = 5 - 3x$.

Aire $= x^2 + x(5 - 3x) = -2x^2 + 5x$.

L'aire est maximale pour $x = 1{,}25$ et alors $y = 1{,}25$; le logo est alors formé de deux carrés.

84 ***Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :***

733200_chap05_exercice84_correction.xls (Excel),
733200_chap05_exercice84_correction.ods (OpenOffice),
733200_chap05_exercice84.xws (Xcas).

1. On peut vérifier que 3 est une solution.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	n+1	n+2	n+3	$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$	$(n+3)^3$	Solution
2	0	1	2	3	9	27	-
3	1	2	3	4	36	64	-
4	2	3	4	5	99	125	-
5	3	4	5	6	216	216	3
6	4	5	6	7	405	343	-

2. On pose $f(x) = x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 - (x + 3)^3$.

On veut les solutions de $f(x) = 0$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$f(x) = 2x^3 - 12x - 18 = 2(x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

La seule solution possible est $x = 3$.

Remarque : Si l'on ne souhaite pas utiliser un logiciel de calcul formel, il est aussi possible d'étudier les variations de la fonction f et de montrer que pour $x > 3$, $f(x) > 0$.