CHAPITRE 4

Dérivation

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé. • Calculer la dérivée de fonctions.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé. On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel.

B Notre point de vue

Ce chapitre est consacré à la dérivation.
Dans la première séquence du cours, introduite par les **activités 1 à 3**, nous définissons le nombre dérivé d'une fonction en un réel a et la tangente à une courbe en un point.
La deuxième et la dernière séquence sont consacrées aux fonctions dérivées des fonctions usuelles et aux fonctions dérivées d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions. Afin de montrer comment sont obtenues les formules de dérivation, nous avons déterminé dans le cours l'expression de la dérivée d'une fonction affine et celle de la fonction carré.
Les exercices sont variés : calculs, lectures graphiques, logique, algorithmique. Une grande place est accordée à l'interprétation graphique d'un nombre dérivé : tracé d'une tangente connaissant le nombre dérivé, détermination d'un nombre dérivé connaissant une tangente.
Les situations étudiées sont diverses : étude d'un coût marginal, de la vitesse de propagation d'un médicament dans le sang, modélisation du profil d'un toboggan ou du tracé de lignes TGV, approximation de pourcentages ou de l'inverse d'un nombre, etc. L'accompagnement personnalisé revient sur les deux capacités attendues du programme : tracer une tangente connaissant le nombre dérivé et calculer la dérivée de fonctions.

Les notions abordées dans le chapitre 4

- Nombre dérivé
- Tangente
- Fonction dérivée
- Dérivée des fonctions usuelles
- Dérivées et opérations

C Réactiver les savoirs

Voir manuel p. 284 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Une fabrique de bonbons

Cette activité permet d'introduire le nombre dérivé comme limite d'un taux d'accroissement dans le cas concret d'étude de coûts et d'accroissements moyens de ces coûts lorsque l'on passe d'une quantité produite, ici de 40 tonnes, à une quantité produite « un tout petit peu » supérieure, de 40 + h tonnes.

Après le calcul du taux d'accroissement de la fonction C entre 40 et 40 + h, et le calcul de ce taux pour différentes valeurs de h, les élèves sont amenés à donner une interprétation graphique de ce taux d'accroissement.

1. En dizaines d'euros :

– coût de fabrication de 40 tonnes : 3 432 ;

– coût de fabrication de 41 tonnes : 3 493,62 ;

– coût de fabrication de 42 tonnes : 3 555,28 ;

– coût de fabrication de 43 tonnes : 3 616,98.

2. $C_m(40) = C(41) - C(40) = 61{,}62$.

$C_m(41) = C(42) - C(41) = 61{,}66$.

$C_m(42) = C(43) - C(42) = 61{,}7$.

3. a. $C(40 + h) = 0{,}02(40 + h)^2 + 60(40 + h) + 1\,000$

$= 0{,}02h^2 + 61{,}6h + 3\,432$

et $C(40) = 3\,432$.

$$\frac{C(40 + h) - C(40)}{h} = \frac{0{,}02h^2 + 61{,}6h}{h} = 0{,}02h + 61{,}6.$$

b. Pour $h = 0{,}1$, l'accroissement moyen est égal à 61,602.

Pour $h = 0{,}01$, il est égal à 61,6 002

Pour $h = 0{,}001$, il est égal à 61,6 0002.

Lorsque h s'approche de 0, l'accroissement moyen s'approche de 61,6.

c. Le rapport $\dfrac{C(40 + h) - C(40)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Activité 2 Animation autour d'un point

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr :

733200_chap04_activite2.url

733200_chap04_activite2.g2w

Fichiers associés dans le manuel numérique Premium :

733200_chap04_activite2.ggb (GeoGebra)

733200_chap04_activite2.g2w (Geoplan)

Cette activité introduit le nombre dérivé d'une fonction en un point comme limite du coefficient directeur des sécantes (AM).

Après une approche empirique où les élèves doivent imaginer le point M se rapprocher de A et estimer vers quelle valeur tend le coefficient directeur de la droite (AM), l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser ces sécantes, ce qu'elles deviennent lorsque M se rapproche de A, et d'avoir une idée plus précise du nombre vers lequel tend leur coefficient directeur.

Le calcul du coefficient directeur de (AM) en fonction de h, puis pour quelques valeurs de h très proches de 0, permet d'introduire la notion de limite de $r(h)$ lorsque h tend vers 0.

1. a. A (1 ; 2) et M (3 ; 10).

b. $r(h) = \dfrac{10 - 2}{3 - 1} = 4$.

2. Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 :

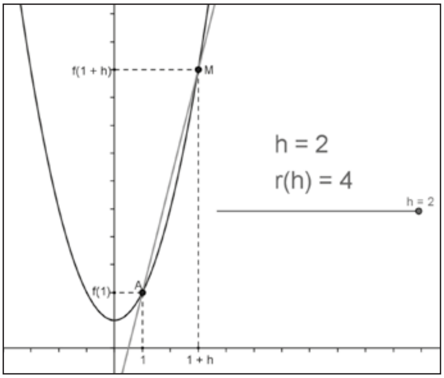
a. le point M s'approche du point A ;

b. le coefficient directeur $r(h)$ semble s'approcher d'un nombre compris entre 2 et 3.

3. Avec le logiciel GeoGebra

Ouvrir le fichier **733200_chap04_activite2.ggb.**

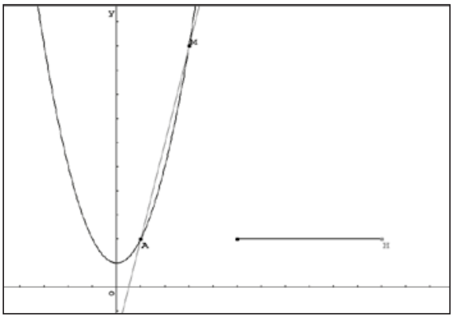
Utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis sur le curseur h pour lui faire prendre des valeurs de plus en plus proches de 0 : de 2 à 0, puis de –4 à 0.



Avec le logiciel Geoplan

Ouvrir le fichier **733200_chap04_activite2.g2w.**

Cliquer sur le point H et le déplacer de sorte que les valeurs de h (affichées en haut de l'écran) soient de plus en plus proches de 0 : de 2 à 0, puis de –4 à 0.



Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le coefficient directeur $r(h)$ s'approche de 2.

4. a. Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2.$$

b.

h	–0,2	–0,1	–0,01	–0,001
$r(h)$	1,8	1,9	1,99	1,999

h	0,001	0,01	0,1	0,2
$r(h)$	2,001	2,01	2,1	2,2

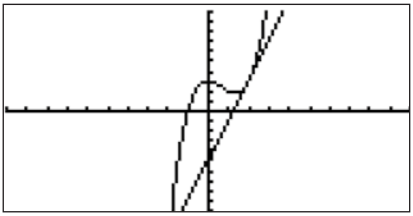
c. Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le coefficient directeur $r(h)$ s'approche de 2.

Activité 3 Une courbe à la loupe

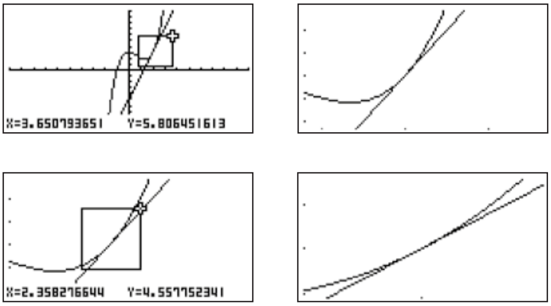
Cette activité introduit la notion de tangente à une courbe en un point.

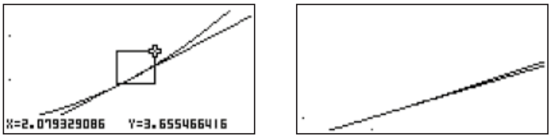
1. La droite (T) a pour équation $y = 4x - 5$.

2.



3.





On observe que la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}$ sont presque confondues au voisinage du point A.

Activité 4 Vers la fonction dérivée de la fonction inverse

Dans cette activité, à partir de la représentation graphique de la fonction inverse et de quatre tangentes à cette courbe, les élèves déterminent $f(x)$ et $f'(x)$ pour quatre valeurs de x. Cela permet de faire une conjecture sur l'expression de la dérivée de la fonction inverse.

L'utilisation de la calculatrice pour construire un tableau de valeurs de la fonction inverse et de sa fonction dérivée permet ensuite de vérifier la cohérence de cette conjecture.

1. a.

x	0,25	0,5	1	2
$f(x)$	4	2	1	0,5
$f'(x)$	–16	–4	–1	–0,25

b. Les valeurs de la troisième ligne sont les opposées des carrés des valeurs de la deuxième ligne.

c. On conjecture que $f'(x) = -(f(x))^2$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2. a. et b.

X	Y1	Y2
.5	2	-4
1	1	-1
1.5	.66667	-.4444
2	.5	-.25
2.5	.4	-.16
3	.33333	-.1111
3.5	.28571	-.0816
4	.25	-.0625

Les résultats sont conformes à la conjecture faite dans la question **1. c.**

E Exercices

Pour démarrer

1 **1.** Réponse **a** (par définition).

2. Réponse **b** (par définition).

2 **1.** $f(4) = -5$.

2. $f(4 + h) = -2(4 + h) + 3 = -5 - 2h$.

3. Le taux d'accroissement de f entre 4 et $4 + h$ est :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{-5-2h-(-5)}{h}=\frac{-2h}{h}=-2.$$

3 **1.** $f(-2) = 5$.

2. $f(-2 + h) = (-2 + h)^2 + 1 = 5 - 4h + h^2$.

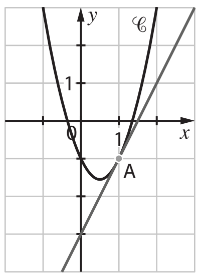
3. a. $r(h)=\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{5-4h+h^2-5}{h}=-4+h.$

b. Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers –4.

Donc f est dérivable en –2 et $f'(-2) = -4$.

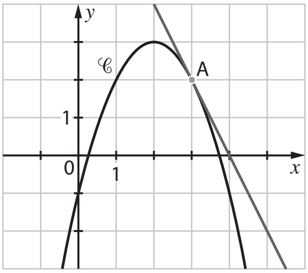
4 **1.** Le coefficient directeur est égal à $f'(1)$, et donc à 2.

2.



5 **1.** Le coefficient directeur est égal à $f'(3)$, et donc à -2.

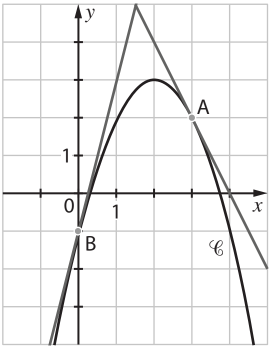
2.



3. Une équation de (T) est $y = -2x + 8$.

6 **1. a.** Le coefficient directeur est égal à $f'(0)$, et donc à 4.

b.



2. Une équation de (T_B) est $y = 4x - 1$.

7 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

8 $f'(1) = 2$ et $f'(0) = -1$.

9 **1.** $f'(x) = -6$, $g'(x) = 2x$ et $h'(x) = 3x^2$.

2. $f'(1) = -6$ et $f'(-1) = -6$.

3. $h'(2) = 3 \times 2^2 = 12$.

10 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

11 **a.** $f'(x) = 0$, $f'(2) = 0$ et $f'(-1) = 0$.

b. $f'(x) = 7$, $f'(2) = 7$ et $f'(-1) = 7$.

c. $f'(x) = 2$, $f'(2) = 2$ et $f'(-1) = 2$.

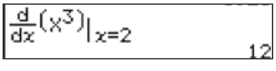
12 **1.** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

2. $f'(1) = -1$ et $f'(2) = -0{,}25$.

13 **1.** $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$.

Le coefficient directeur est égal à 12.

2.



14 **1.** Cette proposition est vraie.

2. a. La négation de cette proposition est :

« Il existe un réel x tel que $f'(x) \neq 5$. »

b. Cette nouvelle proposition est fausse.

15 **1.** Réponse **b**.

2. Réponse **c**.

3. Réponse **c**.

16 $f'(x) = 0$, $g'(x) = 3$ et $h'(x) = -7$.

17 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

18 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

19 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

20 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

21 **1.** $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -2$.

2. $u'(x)v(x) = 15 - 6x$ et $u(x)v'(x) = -6x$.

3. $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -12x + 15$.

22 **1.** $u(x) = x - 1$.

2. $u'(x) = 1$.

$f'(x) = 2 \times 1(x - 1) = 2x - 2$.

23 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

24 **1.** $v(x) = x + 6$.

2. $v'(x) = 1$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+6)^2}$.

25 **a.** $v(x) = x - 5$, $v'(x) = 1$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-5)^2}$.

b. $v(x) = 3x + 1$, $v'(x) = 3$ et $f'(x) = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$.

26 **1.** $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

2. $u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) = 2(x + 3) - (2x - 7) = 13$.

3. $f'(x) = \dfrac{13}{(x+3)^2}$.

27 **1. a.** La valeur affichée est 2.

b. La valeur affichée est -6.

2. Les expressions possibles sont **a.** et **c.**

Pour s'entraîner

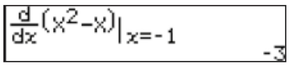
28 **1.** $f(-1) = 2$ et $f(-1 + h) = h^2 - 3h + 2$.

2. $r(h) = \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{h^2 - 3h}{h} = h - 3$.

Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers -3.

Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -3$.

3.



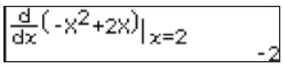
29 **1.** $g(2) = 0$ et $g(2 + h) = -h^2 - 2h$.

2. $r(h) = \dfrac{-h^2 - 2h - 0}{h} = -h - 2$.

Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers -2.

Donc g est dérivable en 2 et $g'(2) = -2$.

3.



30 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

31 **a.** $r(h) = \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = -3$.

Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers -3.

Donc f est dérivable en 4 et $f'(4) = -3$.

b. $r(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{-2}{2h+1}$.

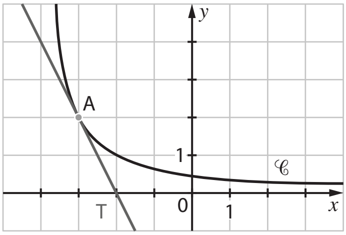
Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers -2.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

32 **Vrai.** $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2$ et $\dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = -2$.

33 **Faux.** Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers -8. Donc $f'(2) = -8$.

34 **1.** et **2.**



3. Une équation de (T) est $y = -2x - 4$.

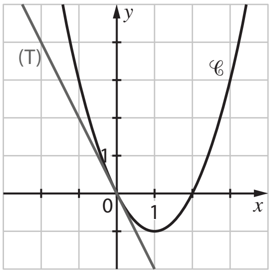
35 **1.** Voir le graphique ci-dessous.

2. a. $r(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 - 2h}{h} = h - 2$.

b. Lorsque h tend vers 0, $r(h)$ tend vers -2.

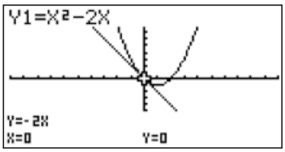
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

3.



4. Une équation de (T) est $y = -2x$.

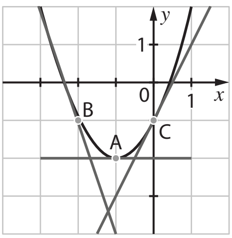
5.



36 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284.**

37 Équation de la tangente : $y = 0{,}5x - 3{,}5$.

38 **1., 2.** et **3.**



39 **Exercice résolu, voir manuel p. 93.**

40 $f(-1) = 2, f(1) = 0, f'(-1) = -1$ et $f'(1) = -5$.

41 **1. a.** $f(-2) = 3, f(-1) = 2$ et $f(1) = 3$.

b. $f'(-2) = 0, f'(-1) = -\dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = 4{,}5$.

2. a. Une équation de (T_1) est $y = 3$.

Une équation de (T_3) est $y = 4{,}5x - 1{,}5$.

b. (T_2) a pour coefficient directeur $f'(-1)$, c'est-à-dire $-\dfrac{3}{2}$, et passe par le point B $(-1 ; 2)$. C'est bien le cas de la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

42 $C'(200) = \dfrac{880 - 600}{200 - 0} = 1{,}4$.

Le coût marginal au rang 200 est 1,4 euro.

43 $f'(2) = 3$ et A $(2 ; 1)$.

44 $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = 2$.

45 Cas **a.** : Figure 4

Cas **b.** : Figure 1

Cas **c.** : Figure 3

Cas **d.** : Figure 2

46 L'énoncé **a.** est faux. Un contre-exemple est donné par la figure 4 (voir exercice 45).

L'énoncé **b.** est faux. Un contre-exemple est donné par la figure 4 (voir exercice 45).

L'énoncé **c.** est faux. Un contre-exemple est donné par la figure 2 (voir exercice 45).

L'énoncé **d.** est vrai.

Si $f(a) = g(a)$, les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$ en leur point d'abscisse a passent par le point A $(a ; f(a))$.

Si, de plus, $f'(a) = g'(a)$, ces deux tangentes ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles et ont un point commun : elles sont confondues.

47 **Vrai.** $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc $f'(3) = -5$.

48 **Vrai.** La tangente a pour coefficient directeur $f'(3) = -2$ et passe par A $(3 ; 1)$. Une équation est bien $y = -2x + 7$.

49 **Faux.** $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc $f'(3) = -2$.

50 **a.** $f'(3) = 27$ et $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

b. $f'(3) = -\dfrac{1}{9}$ et $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -9$.

c. $f'(3) = 5$ et $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 5$.

51 **a.** $f'(-1) = -2$ et $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

b. $f'(-1) = 3$ et $f'(\sqrt{2}) = 6$.

c. $f'(-1) = -2$ et $f'(\sqrt{2}) = -2$.

52 **a.** $f'(0{,}01) = 0$ et $f'(3) = 0$.

b. $f'(0{,}01) = 5$ et $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

c. $f'(0{,}01) = 0{,}02$ et $f'(3) = 6$.

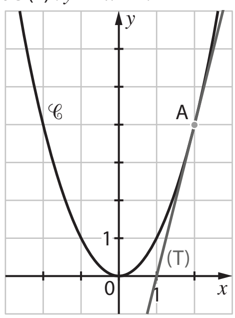
53 **Exercice résolu, voir manuel p. 94.**

54 **1.** Oui. Ces valeurs sont -2 et 2.

2. Non, car pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

55 **1.** Équation de (T) : $y = 4x - 4$.

2.



3. a. $f'(x) = -6$ pour $x = -3$.

Au point d'abscisse –3, la tangente à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur –6.

b. Les coordonnées du point de contact sont (–3 ; 9).

56 **1.** Équation de (T) : y = 12x + 16.

2. a. L'équation $3x^2 = 1$ a deux solutions : $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Il existe deux tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à (D) : l'une au point d'abscisse $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et l'autre au point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b. Les coordonnées des points de contact sont $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

57 **Exercice corrigé, voir manuel p. 284-285.**

58 Soit f la fonction carré et g la fonction racine carrée.

$f'(x) = 2x$ donc $f'(0{,}25) = 0{,}5$.

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(1) = 0{,}5$.

$f'(0{,}25) = g'(1)$ donc la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 0,25 et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 sont parallèles.

59 **1.** Le coefficient directeur de (T_a) est $2a$ et le coefficient directeur de (T_b) est $-\dfrac{1}{b^2}$.

2.

```
Variables     a, c et d sont des nombres réels
              b est un réel non nul
Entrée        Saisir a et b
Traitement    c prend la valeur 2a
              d prend la valeur –1/b²
              Si c = d
              |   Alors Afficher « oui »
              |   Sinon Afficher « non »
              Fin Si
```

3.

Calculatrice Texas :	Calculatrice Casio :
:Prompt A,B :2A→C :-1/B²→D :If C=D :Then :Disp "OUI" :Else :Disp "NON" :End	"a="?→A↵ "b="?→B↵ 2A→C↵ -1÷B²→D↵ If C=D↵ Then "oui"↵ Else "non"↵ IfEnd↵

4. a.

```
A=?1
B=?-1
NON
```

b.

```
A=?-2
B=?0.5
OUI
```

60 **Exercice résolu, voir manuel p. 95.**

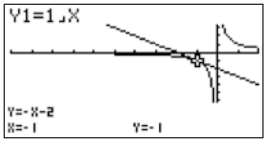
61 **1.** Une équation de (T) est $y = -x - 2$.

2. $f(x) - (-x - 2) = \dfrac{1}{x} + x + 2$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

3. Sur]–∞ ; 0[, cette différence est négative.
Donc sur]–∞ ; 0[, $\mathscr{C}$ est au-dessous de (T).

4.



62 **Faux.** Soit f la fonction cube.
$f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est égal à 12.

63 **Faux.** $f'(1) = 2$ et $g'(1) = -1$. Donc $f'(1) \neq g'(1)$: les tangentes ne sont pas parallèles et donc ne sont pas confondues.

64 **Faux**. Quel que soit le réel a non nul, le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ au point d'abscisse a est négatif $\left(\text{car égal à } -\dfrac{1}{a^2}\right)$. Il ne peut donc pas être égal à 3.

65 **Vrai,** car l'équation $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2$ a une solution $\left(\text{qui est } \dfrac{1}{16}\right)$.

66 $f'(x) = -6x$ et $g'(x) = -12x - 7$.

67 $f'(x) = 15x^2 - 4x + 3$ et $g'(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{2}$.

68 $f'(x) = -16x + 26$.

69 $f'(x) = 32x - 24$.

70 $f'(x) = \dfrac{4}{(3-4x)^2}$.

71 $f'(x) = \dfrac{-14}{(3-4x)^2}$.

72 ***Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :***
733200_chap04_exercice72.xws (Xcas)

```
f:=unapply((3x-5)*(2x+1)^3,x)
    x -> (3*x-5)*(2*x+1)^3
g:=deriver(f)
    x-> 3*(2*x+1)^3+(3*x-5)*6*(2*x+1)^2
h:=factoriser(g)
    x-> 3*(2*x+1)^2*(8*x-9)
```

73 ***Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :***
733200_chap04_exercice73.xws (Xcas)

```
f:=unapply((x-1)/(2x-3)²,x)
    x -> (x-1)/(2*x-3)^2
g:=deriver(f)
    x -> 1/(2*x-3)^2-(x-1)*4*(2*x-3)^-3
h:=factoriser(g)
    x-> (-2*x+1)/(2*x-3)^3
```

74 ***Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :***
733200_chap04_exercice74.xws (Xcas)

```
f:=unapply((5x-3)*sqrt(x),x)
    x -> (5*x-3)*(√x)
g:=deriver(f)
    x -> 5*(√x)+(5*x-3)*(√x)^-1/2
h:=simplify(g)
    x-> (15*x*(√x)-3*(√x))/(2*x)
```

75 **Exercice résolu, voir manuel p. 96.**

76 $f'(x) = \frac{4}{3}$ et $g'(x) = -x + \frac{3}{2}$.

77 $f'(x) = 6$ et $g'(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$.

78 $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$ et $g'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$.

79 $f'(x) = -\frac{14}{(2x-1)^2}$ et $g'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2}$.

80 **1.** $f'(x) = 7(2x - 3) + 7x \times 2 = 28x - 21$.

2. $f(x) = 14x^2 - 21x$ et $f'(x) = 28x - 21$.

3. On a bien la même expression de f'.

81 **Exercice corrigé, voir manuel p. 285.**

82 **1.** $g'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

2. a. $x - 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ et

$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ donc $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

b. $g'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

3. $g'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

83 $f(1) = -3$ et $g(1) = -3$.

$f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(1) = -2$

$g'(x) = -4x + 2$ donc $g'(1) = -2$.

Par conséquent, $f(1) = g(1)$ et $f'(1) = g'(1)$: les deux tangentes sont bien confondues.

84 **1.** L'algorithme affiche :

a. -1 **b.** $-\frac{1}{9}$ **c.** « Pas de nombre dérivé ».

2. Les expressions **b** et **c** peuvent être celles de f.

85 **1.** $g'(x) = 2x$ et $h'(x) = 2x$.

2. a. Cette proposition est vraie.

b. La réciproque est : « Si pour tout réel x, $f'(x) = 2x$, alors f est définie par $f(x) = x^2$. »

Cette proposition est fausse. Prenons la fonction g de la question **1** : pour tout réel x, $g'(x) = 2x$ et g n'est pas la fonction carré.

86 **1.** Le coût de production de 1 000 aspirateurs est $C(1\,000)$, soit 111 000 euros.

Le coût de production de 1 001 aspirateurs est $C(1\,001)$, soit 111 066,003 euros.

L'augmentation du coût entraînée par la fabrication du 1 001e aspirateur est de 66,003 euros.

2. a. Le coût marginal au rang 1 000 est :

$d(1\,000) = C(1\,001) - C(1\,000)$, soit 66,003 euros.

b. $C'(x) = 0{,}006x + 60$.

$C'(1\,000) = 66$.

c. $d(1\,000) - C'(1\,000) = 0{,}003$.

$d(1\,000)$ est très proche de $C'(1\,000)$.

87 **Vrai.** $f'(1) = 6$ et $g'(1) = 6$.

88 **Faux.** $f'(x) = 2 + \frac{3 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$.

89 **Faux.** $f'(x) = 2 \times 3(3x - 1) = 18x - 6$.

90 **Vrai.** Pour tout réel x, $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -2$.

91 **1.** $f'(x) = 9x^2 - 10x + 3$.

2. Le coefficient directeur est égal à $f'(2)$, soit 19.

92 **1.** $u'(x) = \frac{5}{(-x+2)^2}$.

2. $u'(3) = 5$.

93 $3a^2 + 6a = -3$ équivaut à $3(a+1)^2 = 0$.

$f'(a) = -3$ pour $a = -1$.

94 $p'(x) = 0$ équivaut à $3x^2 - 8x = 0$, et donc à $x = 0$ ou $x = \frac{8}{3}$.

En O (0 ; 0) et en B$\left(\frac{8}{3} ; -\frac{256}{27}\right)$, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

95 Une équation est $y = 2x + 2$.

Faire le point

Voir manuel p. 285. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

Revoir des points essentiels

96 **a.** $y = 2x + 4$ **b.** $y = 10x - 20$

c. $y = -4x + 1$ **d.** $y = -6x - 4$

97 $f'(x) = -6x + 2$.

$g'(x) = 8x + 11$.

$h'(x) = 6x^2 - 14x + 1$.

98 $f'(x) = \frac{-8}{(x-1)^2}$; $g'(x) = \frac{15}{(2x+1)^2}$ et $h'(x) = \frac{7}{(-2x+1)^2}$.

Travaux pratiques

TP 1 Approximation de pourcentages

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr :

733200_chap04_TP1prof.g2w (Geoplan)

733200_chap04_TP1prof.xls (Excel)

733200_chap04_TP1prof.ods (OpenOffice)

Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :

733200_chap04_TP1prof.ggb (GeoGebra)

33200_chap04_TP1prof.g2w (Geoplan)

33200_chap04_TP1prof.xls (Excel)

33200_chap04_TP1prof.ods (OpenOffice)

A. Augmentations successives

1. $2\,000 \times 1{,}03^2 = 2\,121{,}8$.

En 2016, le salaire mensuel brut de Fabia sera de 2 121,80 euros.

Il aura augmenté de 6,09 % par rapport au salaire de 2014.

2. On commet une erreur de 1,80 euro et de 0,09 %.

3. Dans le cas précédent, l'erreur que l'on commet en assimilant deux augmentations de 3 % à une augmentation de 6 % est faible.

Si le salaire de Fabia augmentait chaque année de 20 %, en assimilant les deux augmentations de 20 % à une augmentation de 40 %, on commettrait une erreur de 80 euros sur le montant du salaire et de 4 % sur le pourcentage d'augmentation, ce qui n'est pas négligeable.

B. Approximation de $(1 + x)^2$ par $1 + 2x$

1. $f_2'(x) = 2x + 2$.

(T) a pour coefficient directeur $f_2'(0) = 2$ donc une équation de (T) est de la forme $y = 2x + p$.

(T) passe par le point A (0 ; 1) donc $1 = p$.

Une équation de (T) est $y = 2x + 1$.

Avec le logiciel GeoGebra

2. a. Dans la ligne de saisie, saisir **f(x)=(1+x)^2**, **A=(0,f(0))** et **y=1+2x**.

Cliquer droit sur la droite, puis choisir Renommer pour la nommer T.

b. Utiliser l'outil Point sur Objet. Cliquer sur puis sur un point de la courbe.

Cliquer droit sur ce point, puis choisir Renommer pour le nommer M.

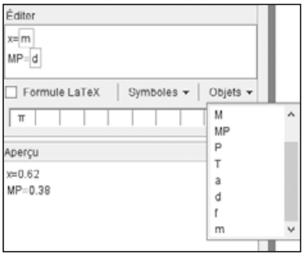
Utiliser l'outil Parallèle. Cliquer sur puis sur le point M et ensuite sur l'axe des ordonnées.

Utiliser l'outil Intersection. Cliquer sur puis sur le point d'intersection de la parallèle créée précédemment et de la droite T.

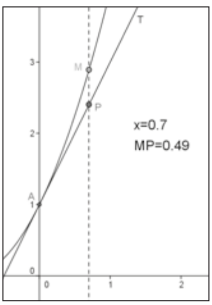
Cliquer droit sur ce point, puis choisir Renommer pour le nommer P.

c. Saisir **m=x(M)**, puis **d=MP** dans la ligne de saisie.

Utiliser l'outil Insérer Texte. Cliquer sur ABC, puis saisir x=m et MP=d, m et d étant à sélectionner dans Objets.



3. Utiliser l'outil Déplacer. Cliquer sur puis sur le point M et le déplacer afin de pouvoir compléter le tableau.



Avec le logiciel Geoplan

2. a. Créer ; Numérique : Fonction numérique puis A 1 variable (Nom de la variable muette : x ; Expression de la fonction : (1+x)^2 ; Nom de la fonction : f).

Créer ; Ligne ; Courbe puis Graphe d'une fonction déjà créée (Nom de la fonction : f ; Bornes : 0 1 ; Nombre de points : 600 ; Nom de la courbe : C).

Créer ; Point ; Point repéré puis Dans le plan (Abscisse : 0 ; Ordonnée : f(0) ; Nom du point : A).

Créer ; Ligne ; Droite(s) puis Définie par une équation (Équation : Y=1+2X ; Nom de la droite : T).

b. • Pour construire le point M

Créer ; Point ; Point libre puis Sur une droite (Nom de la droite : (ox) ; Nom du point : X).

Créer ; Numérique ; Calcul géométrique puis Abscisse d'un point dans le plan (Nom du point : X ; Nom de l'abscisse : x).

Créer ; Point ; Point repéré puis Dans le plan (Abscisse : x ; Ordonnée : f(x) ; Nom du point : M)

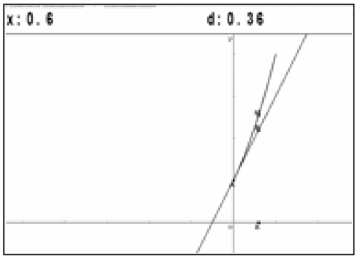
• Pour construire le point P.

Créer ; Point puis Intersection 2 droites (Première droite : T ; Deuxième droite : (MX) ; Point d'intersection : P).

c. Créer ; Numérique ; Calcul géométrique puis Longueur d'un segment (Nom du segment : MP ; Nom de la longueur : d).

Créer ; Affichage puis Variable numérique déjà définie (Nom de la variable numérique : x ; Nombre de décimales : 2).

Créer ; Affichage puis Variable numérique déjà définie (Nom de la variable numérique : d ; Nombre de décimales : 2).



3. Pour déplacer le point M, cliquer sur le point X et le déplacer sur l'axe des abscisses.

a.

x	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Distance MP	0,49	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01

b. Lorsque M s'approche de A, la distance MP devient proche de 0.

c. L'erreur commise en assimilant $(1 + x)^2$ à $1 + 2x$ est égale à x^2.

C Approximation de $(1+x)^n$ par $1 + nx$

1. Une équation de (T) est $y = nx + 1$.

2. Ouvrir une feuille de calcul d'un tableur.

Saisir dans la cellule **B2** la formule :

=(1+B$1)^$A2-(1+$A2*B$1).

La recopier dans la plage de cellules **B2:F4**.

	A	B	C	D	E	F
1	n \ x	0,03	0,025	0,02	0,015	0,01
2	3	0,0027	0,0019	0,0012	0,0007	0,0003
3	5	0,0093	0,0064	0,0041	0,0023	0,0010
4	10	0,0439	0,0301	0,0190	0,0105	0,0046

3. $1\,500 \times (1 + 10 \times 0{,}02) = 1\,800$.
On disposera d'environ 1 800 euros.

TP2 Coût moyen minimum

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr :
733200_chap04_TP2prof.xls (Excel)
733200_chap04_TP2prof.ods (OpenOffice)
Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :
733200_chap04_TP2prof.xls (Excel)
733200_chap04_TP2prof.ods (OpenOffice)
733200_chap04_TP2prof.ggb (GeoGebra)

A. Coût marginal et dérivée du coût total

1. Ouvrir une feuille de calcul d'un tableur.

2. Entrer dans la cellule **A2** la valeur 0 et saisir dans la cellule **A3** la formule **=A2+10**.
Recopier la cellule **A3** vers le bas jusqu'à la cellule **A102**.

3. a. Saisir dans la cellule **B2** la formule :
=0,001*A2^3-1,2*A2^2+600*A2+500.

b. Saisir dans la cellule **C2** la formule :
=0,001*(A2+1)^3-1,2*(A2+1)^2+600*(A2+1)+500.
Saisir dans la cellule **D2** la formule **=C2-B2**.

c. $C'(q) = 0{,}003q^2 - 2{,}4q + 600$.
Saisir dans la cellule **E2** la formule **=0,003*A2^2-2,4*A2+600**.

d. Recopier la plage de cellules **B2:E2** vers le bas jusqu'à la ligne **102**.

	A	B	C	D	E
1	q	$C(q)$	$C(q+1)$	$C(q+1)-C(q)$	$C'(q)$
2	0	500	1098,80	598,80	600
3	10	6381	6956,13	575,13	576,3
4	20	12028	12580,06	552,06	553,2
5	30	17447	17976,59	529,59	530,7
6	40	22644	23151,72	507,72	508,8
7	50	27625	28111,45	486,45	487,5
8	60	32396	32861,78	465,78	466,8
9	70	36963	37408,71	445,71	446,7
10	80	41332	41758,24	426,24	427,2
11	90	45509	45916,37	407,37	408,3
12	100	49500	49889,10	389,10	390

4. Les valeurs de $C(q+1) - C(q)$ et de $C'(q)$ sont très proches.

B. Minimum du coût moyen

1. Saisir dans la cellule **F3** la formule **=B3/A3**.
La recopier vers le bas jusqu'à la cellule **F102**.

	A	B	C	D	E	F
58	560	135796	135993,28	197,28	196,8	242,49
59	570	137813	138020,21	207,21	206,7	241,78
60	580	139932	140149,74	217,74	217,2	241,26
61	590	142159	142387,87	228,87	228,3	240,95
62	600	144500	144740,60	240,60	240	240,83
63	610	146961	147213,93	252,93	252,3	240,92
64	620	149548	149813,86	265,86	265,2	241,21
65	630	152267	152546,39	279,39	278,7	241,69
66	640	155124	155417,52	293,52	292,8	242,38

2. a. Le coût moyen semble minimum pour $q = 600$.

b. Le coût marginal vaut alors environ 240 euros.

C. Détermination de l'optimum technique à l'aide d'une tangente

1. La tangente (T) a pour coefficient directeur $C'(a)$: une équation de (T) est de la forme $y = C'(a)x + p$.
(T) passe par le point de coordonnées $(a\,;C(a))$ donc $C(a) = C'(a)a + p$.
Par conséquent $p = C(a) - aC'(a)$.
Une équation de (T) est : $y = C'(a)x + C(a) - aC'(a)$,
soit $y = C'(a)(x - a) + C(a)$.

2. a. Le point d'abscisse 0 de (T) a pour ordonnée :
$C'(a)(0 - a) + C(a)$, c'est-à-dire : $-aC'(a) + C(a)$.
Si $C'(a) = C_M(a)$, alors $C'(a) = \dfrac{C(a)}{a}$ et donc $-aC'(a) + C(a) = 0$.
(T) passe par l'origine du repère.

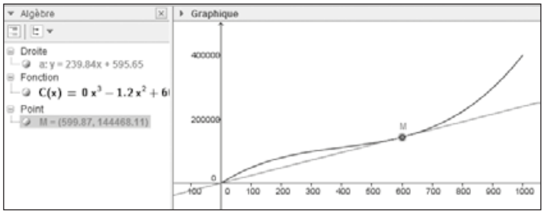
b. Si (T) passe par l'origine du repère, alors :
$0 = C'(a)(0 - a) + C(a)$ donc $C'(a) = \dfrac{C(a)}{a}$.

3.a. Avec un logiciel de géométrie dynamique :
Saisir dans la ligne de saisie :
C(x)=0.001x^3-1.2x^2+600x+500.
Dans Graphique, entrer : xMin : - 50, xMax : 1 000,
yMin : - 1 0000 et yMax : 4 50000.

b. Utiliser l'outil Point sur Objet. Cliquer sur puis sur un point de la courbe.
Cliquer droit sur ce point, puis choisir Renommer pour le nommer M.
Utiliser l'outil Tangentes. Cliquer sur , puis sur le point M et ensuite sur la courbe.

c. Utiliser l'outil Déplacer. Cliquer sur puis sur le point M et le déplacer jusqu'à ce que la tangente passe par l'origine du repère.

d. Lire dans la fenêtre Algèbre l'abscisse du point M.



Une valeur approchée de a est 600.

4. L'optimum technique de production est de 600 ballons.

Pour approfondir

99 **1.** $(u \times u^2)' = u' \times u^2 + u \times (u^2)' = u' \times u^2 + u \times 2\,uu' = 3u^2u'$.

2. $(u^4)' = (u \times u^3)' = u' \times u^3 + u \times (u^3)' = u' \times u^3 + u \times 3u^2u'$.
Donc $(u^4)' = 4u^3u'$.

3. $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$.
$g'(x) = 8x(x^2 - 1)^3$.

100 **a. Vrai.** $f'(x) = 3x^2g(x) + x^3g'(x)$.
Donc $f'(1) = 3 \times 1^2 \times g(1) + 1^3 \times g'(1)$
$2 = 3 \times 2 + g'(1)$
$g'(1) = -4$.

b. Faux. $g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$.

c. Vrai. $g'(x) = \dfrac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \dfrac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$.

101 **1.** La tangente (T) à $\mathcal{P}$ en A a pour coefficient directeur $f'(a)$, soit $-2a + 4$: une équation de (T) est de la forme $y = (-2a + 4)x + p$.
(T) passe par le point A $(a\,; -a^2 + 4a - 2)$ donc
$-a^2 + 4a - 2 = (-2a + 4)a + p$.

Par conséquent $p = a^2 - 2$.
Une équation de (T) est : $y = (-2a + 4)x + a^2 - 2$.
2. I est un point de (T) si et seulement si :
$4 = (-2a + 4) \times \dfrac{3}{2} + a^2 - 2.$
Cette équation a deux solutions : 0 et 3. On peut donc mener deux tangentes à $\mathscr{P}$ à partir du point I : l'une au point A d'abscisse 0 et l'autre au point B d'abscisse 3.
Équation de la tangente au point A : $y = 4x - 2$.
Équation de la tangente au point B : $y = -2x + 7$.

102 **1. a.** $C_m(q) = 0{,}03q^2 - 2q + 50$.
$C_m(60) = 0{,}03 \times 60^2 - 2 \times 60 + 50 = 38$. $55 - C_m(60) = 17$.
b. Oui, car $55 - C_m(60) > 0$.
Donc le coût engendré par la fabrication du 61e article (38 euros) est inférieur à ce que rapporte la vente de cet article (55 euros).
2. $55 - C_m(70) = -2$.
Fabriquer et vendre le 71ème article diminue le profit total car $55 - C_m(70) < 0$.
3.

Variables	Q est un entier naturel et C_m est un réel
Initialisation	Q prend la valeur 1 C_m prend la valeur $0{,}03Q^2 - 2Q + 50$
Traitement	**Tant que** $C_m < 55$ Q prend la valeur $Q + 1$ C_m prend la valeur $0{,}03Q^2 - 2Q + 50$ **Fin Tant que**
Sortie	Afficher $Q - 1$

4. a.

Texas	Casio
:1→Q :0.03Q²-2Q+50→C :While C<55 :Q+1→Q :0.03Q²-2Q+50→C :End :Q-1→Q :Disp Q	1→Q↵ 0.03Q²-2Q+50→C↵ While C<55↵ Q+1→Q↵ 0.03Q²-2Q+50→C↵ WhileEnd↵ Q-1→Q↵ Q◢

b. Il faut fabriquer et vendre 69 articles.

```
69
Done
```

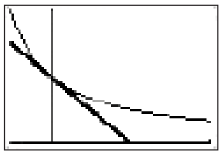
103 **1.** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
2. a. $f(0) = 1{,}2$ et $f'(0) = 0$.
b. $f(0) = 1{,}2$ donc $d = 1{,}2$. $f'(0) = 0$ donc $c = 0$.
3. a. $f(2) = 0$ et $f'(2) = 0$.
b. On a : $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1{,}2$.
$f(2) = 0$ donc $8a + 4b + 1{,}2 = 0$.
$f'(2) = 0$ donc $12a + 4b = 0$.
Les réels a et b sont bien solutions du système donné.
c. $a = 0{,}3$ et $b = -0{,}9$. Donc $f(x) = 0{,}3x^3 - 0{,}9x^2 + 1{,}2$.

104 (T) a pour équation $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
Le point d'intersection de (T) et de l'axe des ordonnées est $M\left(0 ; \dfrac{2}{a}\right)$.
Celui de (T) et de l'axe des abscisses est $N(2a ; 0)$.
Le milieu de [MN] a pour coordonnées $\left(a ; \dfrac{1}{a}\right)$. Il s'agit du point de $\mathscr{H}$ d'abscisse a.

105 **1.** (T) a pour équation $y = -x + 1$.
2. On conjecture que $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T) sur $]-\infty ; -1]$ et au-dessous de (T) sur $[-1 ; +\infty[$.
3. a. Pour tout réel x, $f(x) - (-x + 1) = -x^3 + x^2 + x - 1$.
$-(x + 1)(x - 1)^2 = (-x - 1)(x^2 - 2x + 1) = -x^3 + x^2 + x - 1$.
Donc $f(x) - (-x + 1) = -(x + 1)(x - 1)^2$.
b. Pour tout réel x, $(x - 1)^2 \geqslant 0$.
Donc $f(x) - (-x + 1)$ est du signe de $-(x + 1)$.
Sur $]-\infty ; -1]$, $f(x) - (-x + 1) \geqslant 0$: $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T).
Sur $[-1 ; +\infty[$, $f(x) - (-x + 1) \leqslant 0$: $\mathscr{C}$ est au-dessous de (T).

106 **1.** La vitesse à l'instant $t = 0$ est égale à $f'(0)$, c'est-à-dire au coefficient directeur de (OB), la tangente à $\mathscr{C}$ au point O. Cette vitesse est de 12,5 mg/h.
La vitesse à l'instant $t = 4$ est égale à $f'(4)$, c'est-à-dire au coefficient directeur de (AA'), la tangente à $\mathscr{C}$ au point A. Cette vitesse est $\dfrac{16 - 10}{0 - 4}$ mg/h, soit $-1{,}5$ mg/h.
2. $f'(t) = \dfrac{-50t^2 + 200}{(t^2 + 4)^2}$.
$f'(0) = \dfrac{200}{16} = 12{,}5$ et $f'(4) = \dfrac{-600}{400} = -1{,}5$.

107 **1. a.** Une équation de (T) est $y = 1 - x$.
b.



c. $d(x)$ est la différence entre l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et l'ordonnée du point de (T) d'abscisse x.
d. $d(1) = 0{,}5$
$d(0{,}1) \approx 0{,}009$
$d(0{,}001) \approx 10^{-6}$
$d(0{,}0001) \approx 10^{-8}$
Pour x voisin de 0, la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) sont très proches, donc $d(x)$ est proche de 0 et $\dfrac{1}{1 + x}$ est proche de $1 - x$.
2. a. Avant l'augmentation, l'article coûte 80 euros.
b. $84 \times 0{,}95 = 79{,}8$.
On commet une erreur de 0,2 euro.

108 **1. a.** $d(50) = 300$.
Lorsque le prix est de 50 euros, 300 articles sont demandés.
b. Lorsque le prix est de 50,5 euros, 298 articles sont demandés.
c. Le taux de variation de la demande est égal à $\dfrac{298 - 300}{300}$, soit $-\dfrac{2}{3}$ % et celui du prix est égal à 1 %. Donc l'élasticité est égale à $-\dfrac{2}{3}$, soit environ $-0{,}67$.
2. a. $E(p)$ est négatif.
b. $E(p) = \dfrac{-4p}{500 - 4p}$.
c. $E(50) = -\dfrac{2}{3} \approx -0{,}67$.
On obtient la même valeur que dans la question **1. c**.

109 **A. Un premier raccordement**

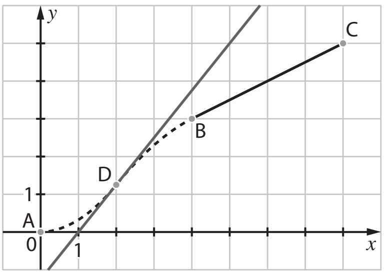
1. a. La fonction, qui à x associe $\frac{5}{16}x^2$, est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $[0\,;2]$.

b. $-\frac{3}{16}x^2 + 2x - 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$.

$a = -\frac{3}{16}$, $b = 2$ donc $-\frac{b}{2a} = \frac{16}{3}$.

La fonction qui, à x associe $-\frac{3}{16}x^2 + 2x - 2$, est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{16}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{16}{3}\,;+\infty\right[$ donc g est croissante sur $[2\,;4]$.

c.



2. $f(2) = g(2) = 1{,}25$ donc D a pour coordonnées $(2\,;1{,}25)$.

3. a. $f(0) = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point A $(0\,;0)$.

$f'(x) = \frac{5}{8}x$ donc $f'(0) = 0$: la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est bien parallèle à l'axe des abscisses.

b. $g(4) = 3$ donc $\mathscr{C}_g$ passe par le point B $(4\,;3)$.

$g'(x) = -\frac{3}{8}x + 2$ donc $g'(4) = 0{,}5$.

Comme la droite (BC) a pour coefficient directeur 0,5, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B est bien la droite (BC).

4. a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point D a pour coefficient directeur $f'(2)$, soit 1,25.

La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point D a pour coefficient directeur $g'(2)$, soit 1,25.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont bien la même tangente au point D.

b. Voir la figure ci-dessus.

B. Un deuxième raccordement

1. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

2. a. La courbe passe par A donc $f(0) = 0$.

La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(0) = 0$.

b. $f(0) = 0$ donc $d = 0$.

$f'(0) = 0$ donc $c = 0$.

c. $f(x) = ax^3 + bx^2$.

3. a. Le coefficient directeur de (BC) est 0,5.

b. La courbe passe par B donc $f(4) = 3$.

La tangente en B est la droite (BC) donc $f'(4) = 0{,}5$.

c. $f(4) = 3$ donc $64a + 16b = 3$.

$f'(4) = 0{,}5$ donc $48a + 8b = 0{,}5$.

d. $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{7}{16}$.

$f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{7}{16}x^2$.

Pour aller plus loin

110 Soit f la fonction carré, $\mathscr{P}$ sa courbe représentative et a un réel.

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -4x - 4$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a signifie que $f'(a) = -4$ et $f(a) = -4a - 4$

soit $2a = -4$ et $a^2 = -4a - 4$.

On en déduit que $a = -2$.

La droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse -2.

111 **1.** La tangente à $\mathscr{P}$ au point A et la tangente à $\mathscr{H}$ au point B ont la même équation : $y = -4x - 4$.

Elles sont donc confondues.

2. Soit $\mathscr{P}'$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{H}$ au point B.

$\mathscr{P}'$ passe par le point B $(-0{,}5\,;-2)$ et a pour tangente en B la droite T signifie que $f(-0{,}5) = -2$ et $f'(-0{,}5) = -4$.

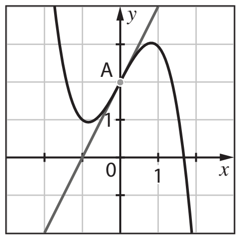
D'où $-2 = 0{,}25 - 0{,}5b + c$ et $2 \times (-0{,}5) + b = -4$.

Et par suite, $b = -3$ et $c = -1{,}5 - 2{,}25 = -3{,}75$.

On en déduit que $f(x) = x^2 - 3x - 3{,}75$.

112 ***Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :***
733200_chap04_exercice112.ggb (GeoGebra)

1.



2. On conjecture que sur $]-\infty\,;0]$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T) et sur $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de (T).

3. La tangente (T) a pour équation $y = 2x + 2$.

On doit étudier le signe de $f(x) - (2x + 2)$.

4. $f(x) - (2x + 2) = -x^3$.

Sur $]-\infty\,;0]$, $f(x) - (2x + 2) \geqslant 0$: $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T).

Sur $[0\,;+\infty[$, $f(x) - (2x + 2) \leqslant 0$: $\mathscr{C}$ est au-dessous de (T).

113 ***Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr et sur le manuel enrichi Premium :***
733200_chap04_exercice113.xws (Xcas)

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 - x - 5$ et $g(x) = -x^3 + 3x + 3$.

Avec le logiciel Xcas, on résout l'équation $f(x) = g(x)$:

```
1 resoudre(2x²-x-5=-x^3+3x+3)
  [-2, 2]
```

Pour $x = -2$, $f(-2) = g(-2) = 5$.

Pour $x = 2$, $f(2) = g(2) = 1$.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ ont pour points d'intersection A $(-2\,;5)$ et B $(2\,;1)$.

2. $f'(x) = 4x - 1$ donc $f'(-2) = -9$ et $g'(x) = -3x^2 + 3$ donc $g'(-2) = -9$.

Au point A, la tangente à $\mathscr{P}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ ont le même coefficient directeur : elles sont confondues.

$f'(2) = 7$ et $g'(2) = -9$.

Au point B, la tangente à $\mathscr{P}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ n'ont pas le même coefficient directeur : elles ne sont pas confondues.