CHAPITRE
3 Le second degré

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de Seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

B Notre point de vue

À partir de la notion de fonction polynôme du second degré, il y a diverses pistes : racines du polynôme, factorisation, variations de la fonction, etc. Celles–ci se déclinent sur plusieurs cadres : algébrique, analytique et géométrique.
Les exercices, de difficulté croissante, reprennent tous ces thèmes. Après avoir travaillé (et maîtrisé) chacune des techniques de base, l'élève est confronté à des exercices utilisant plusieurs techniques simultanément et plusieurs cadres en même temps.
Autant que possible, des problèmes « concrets » ou des problèmes « économiques » (nombreux en dernière partie du chapitre) ont été proposés.
De nombreux exercices et un TP travaillent sur les algorithmes ; l'élève saura s'en servir pour saisir sur sa calculatrice des programmes lui permettant, notamment, d'obtenir les (éventuelles) racines d'une équation du second degré. C'est aussi pour cela que tous les algorithmes sont à programmer sur les calculatrices ; l'élève saura les conserver pour les utiliser régulièrement et facilement !
Enfin, le théorème sur la somme et le produit des racines, non exigible (mais qui se révèle bien utile !), est proposé en fin de **TP1** (sans démonstration).

Les notions abordées dans le chapitre 3

– Forme canonique d'un polynôme du second degré
– Équations du second degré
– Factorisation d'un polynôme du second degré
– Signe d'un trinôme du second degré
– Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

C Réactiver les savoirs

Les notions abordées dans ces exercices permettent de réactiver les notions utiles pour ce chapitre.
Voir manuel pages 283-284 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 La méthode d'Al-Khawarizmi

Cette activité a pour but d'introduire la forme canonique en proposant une méthode attribuée à Al–Khawarizmi.

1. L'aire du carré est $(x + 5)^2$ ou encore :
$x^2 + 5x + 5x + 25$, soit $x^2 + 10x + 25$.
On obtient : $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$. Comme par hypothèse $x^2 + 10x = 39$, alors on peut écrire : $39 = (x + 5)^2 - 25$, soit $(x + 5)^2 = 64$.
Ainsi, $x + 5 = 8$ ou $x + 5 = -8$. Ou encore $x = 3$ ou $x = -13$.
$-13 < 0$ donc la solution retenue est 3.

2. a. $x^2 + 12x = 45$ si $(x + 6)^2 - 36 = 45$, soit $(x + 6)^2 = 81$. On obtient ainsi $x + 6 = 9$ ou $x + 6 = -9$, soit deux solutions 3 et –15.

b. $x^2 + 4x - 32 = (x + 2)^2 - 4 - 32 = (x + 2)^2 - 36$. On garde $x = 3$.
Ainsi $x^2 + 4x - 32 = 0$ si $(x + 2 + 6) = 0$, soit $(x + 8)(x - 4) = 0$. Les deux solutions sont –8 et 4. On garde $x = 4$.

Activité 2 Observation de paraboles

Remarque : il peut y avoir une erreur dans la question 1, il faut lire i (x) = –5x² + x – 3.

Cette activité a pour but d'introduire le discriminant d'un polynôme f du second degré et de montrer le lien entre le signe de Δ et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ici on utilise la calculatrice pour visualiser le nombre de solutions, qui sont les abscisses des points d'intersection de la parabole représentant f avec l'axe des abscisses.

	a	b	c	Δ	N
$f(x)$	3	2	–5	64	2
$g(x)$	–9	13	10	529	2
$h(x)$	2	–8	8	0	1
$i(x)$	–5	1	–3	–59	0

Si $\Delta > 0 : N = 2$, si $\Delta = 0 : N = 1$ et si $\Delta < 0 : N = 0$.
Si $\Delta > 0$: l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, si $\Delta = 0$: elle a une seule solution et si $\Delta < 0$ elle n'a pas de solution.

Activité 3 Optimisation d'un bénéfice

Cette activité permet d'étudier le signe de deux fonctions polynômes de degré 2 après avoir écrit celles–ci sous forme canonique.

1. a. $(x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 16 + 2 = x^2 - 8x + 18 = C(x)$.

b. $C(x)$ est une somme d'un carré et d'un nombre strictement positif : pour tout x, on a $C(x) > 0$. Quel que soit le nombre de bracelets commandés, il y aura toujours un coût de fabrication à payer.

2. a. La recette $R(x)$ pour chaque millier d'élastiques vendus vaut $R(x) = 3x$. Comme $B(x) = R(x) - C(x)$, on a :
$$B(x) = 3x - (x^2 - 8x + 18) = -x^2 + 11x - 18.$$

b. $-\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} = -x^2 + 11x - \frac{121}{4} + \frac{49}{4} = -x^2 + 11x - 18 = B(x)$.

c. $B(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 = \left[\frac{7}{2} - \left(x - \frac{11}{2}\right)\right] \times \left[\frac{7}{2} + \left(x - \frac{11}{2}\right)\right]$.
$= (-x + 9)(x - 2)$

d. Puisque $x \geqslant 4$, alors $x - 2 \geqslant 0$. Le signe de $B(x)$ est donc celui de $-x + 9$.

x	4		9		12
$B(x)$		+	0	–	

3. D'après le tableau précédent, l'entreprise doit vendre entre 4 000 et 9 000 bracelets.

Activité 4 Des paraboles qui changent de forme

Fichiers associés dans le manuel numérique Premium :
733200_chp03_activite4_question1.ggb
733200_chp03_activite4_question1_correction.ggb
733200_chp03_activite4_question2.ggb
733200_chp03_activite4_question2_correction.ggb
733200_chp03_activite4_question3.ggb
733200_chp03_activite4_question3_correction.ggb
Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr :
733200_chp03_activite4_question1.url
733200_chp03_activite4_question2.url
733200_chp03_activite4_question3.url

Cette activité est proposée avec les fichiers GeoGebra ci-dessus. Dans chacun des cas, nous avons créé un curseur qui permet d'animer la figure et de conjecturer les résultats que l'on va ensuite démontrer. L'objectif est d'établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme associée. Cette activité permet d'introduire le dernier paragraphe du cours et de visualiser les propriétés qui vont être présentées.

GeoGebra
À l'aide de l'outil curseur ; on crée un premier curseur c ; on définit la parabole d'équation $y = 2x^2 + 4x + c$ en entrant **y=2x^2+4x+c** dans le champ de saisie : elle est tracée automatiquement. En faisant varier c, par exemple de –10 à 10 avec un pas de 0,1, on observe que ces paraboles se déplacent verticalement ; on peut faire afficher la trace de leurs sommets (en sélectionnant Trace activée dans le menu contextuel de la parabole $\mathcal{P}_c$) et observer que ceux-ci parcourent la droite d'équation $x = -1$.
On fait de même pour les autres paraboles. On crée un curseur b et on définit la parabole d'équation $y = x^2 + bx + 1$. On crée un curseur a et on définit la parabole d'équation $y = ax^2 + 4x - 1$.

Geoplan
Les réels a, b et c sont pilotés au clavier avec un pas de 0,1.
Par défaut, a est piloté. Pour changer la variable pilotée, aller dans le menu Piloter, puis Piloter au clavier.

1. Lorsque c varie, les paraboles se « déplacent verticalement ». En effet, les sommets de ces paraboles ont tous la même abscisse $x = -1$. Les sommets des paraboles appartiennent à la droite d'équation $x = -1$.

2. Lorsque b varie, les paraboles se déplacent en gardant la même forme ; elles sont toutes tournées vers le haut, conservent le même écartement. Elles coupent deux fois l'axe des abscisses lorsque $b < -2$ ou $b > 2$; elles sont tangentes à l'axe des abscisses lorsque $b = 2$ ou $b = -2$. Pour b compris entre –2 et 2, elles ne coupent pas l'axe des abscisses. Elles passent toutes par le point de coordonnées (0 ; 1).

3. Lorsque a varie, les paraboles changent de forme. Lorsque a est positif, elles sont tournées vers le haut ; lorsque a est négatif, elles sont tournées vers le bas. Elles passent toutes par le point de coordonnées (0 ; –1). Si $a > -4$, elles coupent deux fois l'axe des abscisses. Si $a < -4$, elles ne coupent par l'axe des abscisses. Si $a = -4$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.

E Exercices

Pour démarrer

1 **1.** Le polynôme s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = 1$, $b = 7$ et $c = -10$.

2. $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$.

2 **a.** $2(x-2)(x+4) = 2(x^2 + 4x - 2x - 8) = 2(x^2 + 2x - 8)$
$= 2x^2 + 4x - 16$.

b. $-3(x-2)(x+1) = -3(x^2 + x - 2x - 2) = -3(x^2 - x - 2)$
$= -3x^2 + 3x + 6$.

3 **a.** $f(x) = x^2 + 6x - 9$; $a = 1$, $b = 6$ et $c = -9$.

b. $f(x) = 4x^2 + 13x + 8$; $a = 4$, $b = 13$ et $c = 8$.

4 **a.** Oui **b.** Non **c.** Oui **d.** Non

5 1 C ; 2 D ; 3 B ; 4 A.

6 **a.** $\alpha = -\frac{7}{6}$ et $\Delta = 25$; **b.** $\alpha = -3$ et $\Delta = 0$;
c. $\alpha = -\frac{3}{4}$ et $\Delta = -23$; **d.** $\alpha = 0$ et $\Delta = -40$.

7 **1.** Algorithme complété :

Variables	a, b, c et Δ sont des nombres réels
Entrée	Saisir a, b et c
Traitement	Δ prend la valeur $b^2 - 4a*c$
Sortie	Afficher Δ

2. Programmation sur calculatrice :

Texas	Casio
PROGRAM:DISCRIM :Prompt A,B,C :B^2–4*A*C→D :Disp D	====DISCRIM==== ?→A:?→B:?→C…↵ : B^2–4*A*C→D◢

8 $\Delta = 16$; $\Delta = 9$.

9 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

10 $\Delta = 233$; $\Delta = 64$.

11 **1.** Parce que le discriminant vaut 144 et est donc strictement positif, d'où les deux racines.

2. $x_0 = -\frac{-24}{2 \times 4} = 3$.

3. Le discriminant vaut –68 et est donc strictement négatif, d'où l'absence de solution.

12 **a.** $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

b. $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$; $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.

13 **a.** $\Delta = 8^2 - 4 \times (-5) \times (-17) = -276$; pas de solution .

b. $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 9 \times 49 = 0$; $x_0 = \frac{7}{3}$.

14 **1.** $f(x) = 2(x - (-2))(x - 4) = 2(x + 2)(x - 4)$.

2. $5 > 0$ donc le polynôme est positif sur [1 ; 3].

3. $-12 < 0$. Le polynôme est toujours du signe du coefficient de x^2, qui est $4 > 0$.

15 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

16 $C(0{,}5) = -4 \times 0{,}52 + 6 \times 0{,}5 - 2 = 0$. De même, $C(1) = 0$.
$C(x) = -4(x - 0{,}5)(x - 1)$.

17 **a.** $x_0 = -3$; $A(x) = (x + 3)^2$.

b. $x_1 = 0$ et $x_2 = -2$; $B(x) = 4x(x + 2)$.

18 **a.** $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$; $C(x) = -(x - 4)(x + 1)$.

b. $x_1 = -11$ et $x_2 = -5$; $D(x) = (x + 11)(x + 5)$.

19

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

20

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

21

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		–	0	–	

22 Deux racines, $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$, et $-3 < 0$.

23 Pas de racine et $1 > 0$.

24 **a.** $x_1 = -6$ et $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		-6		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

b. Pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		+	

25 **a.** $x_0 = -0{,}25$.

x	$-\infty$		$-0{,}25$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

b. $x_1 = -4$ et $x_2 = 0$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$j(x)$		+	0	–	0	+	

26 S =] –∞ ; 2 [∪]6 ; +∞[.

27 S = Ø.

28 **1.** 2 car $\Delta > 0$.

2. Toute parabole avec les branches tournées « vers le haut ».

29 **1.** $a > 0$. **2.** $\Delta > 0$.

30 Pour $\mathscr{P}_1 : a > 0$ et $\Delta < 0$. Pour $\mathscr{P}_2 : a < 0$ et $\Delta > 0$.

31 **a.** 2 **b.** 0

32 **1.** $a = 1 > 0$ donc f est décroissante, puis croissante.

2. $\alpha = -1$ et $f(-1) = -9$ d'où S $(-1 ; -9)$.

3. $x = -1$.

33 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

34 **a.** $a = 1 > 0$ donc f est décroissante, puis croissante et admet donc un minimum.

Il est atteint en $x = \frac{0}{2\times 1} = 0$ et vaut $f(0) = 2$.

b. $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et admet donc un minimum.

Il est atteint en $x = -\frac{-12}{2\times 3} = 2$ et vaut $f(2) = 1$.

35 **a.** $a = -1 < 0$ donc f est croissante puis décroissante et admet donc un maximum.

Il est atteint en $x = -\frac{2}{2\times(-1)} = 1$ et vaut $f(1) = 2$.

b. $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et admet donc un minimum. I

Il est atteint en $x = -\frac{12}{2\times 3} = -2$ et vaut $f(-2) = -3$.

Pour s'entraîner

36 1 C ; 2 A ; 3 B.

37 **a.** $\Delta = 240$. **b.** $\Delta = 12$.

38 **a.** $\Delta = 119$ **b.** $\Delta = 24$.

39 **a.** $(\Delta = 361)$ $x_1 = -\frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

b. $(\Delta = 64)$ $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$.

40 **a.** $(\Delta = -71)$. Pas de solution.

b. $(\Delta = 64)$ $x_1 = 1{,}5$ et $x_2 = 3{,}5$.

41 **a.** $(\Delta = 1)$ $x_1 = -1{,}5$ et $x_2 = -1$.

b. $(\Delta = 81)$ $x_1 = 0{,}25$ et $x_2 = -2$.

42 **a.** $(\Delta = 225)$ $x_1 = -1$ et $x_2 = -6$.

b. $(\Delta = 196)$ $x_1 = -3$ et $x_2 = 4$.

43 **a.** $(\Delta = 529)$ $x_1 = -0{,}75$ et $x_2 = 0{,}4$.

b. $(\Delta = 1\,681)$ $x_1 = -3{,}5$ et $x_2 = 0{,}6$.

44 **a.** $(\Delta = 784)$ $x_1 = -2{,}5$ et $x_2 = 4{,}5$.

b. $(\Delta = 576)$ $x_1 = -1{,}25$ et $x_2 = 0{,}25$.

45 **Exercice résolu, voir p. 66 du manuel.**

46 **a.** S = {0 ; 16}. **b.** Pas de solution.

47 **a.** Équation équivalente à $x^2 + 10x - 75 = 0$; S = {–15 ; 5}.

b. S = {3,5 ; – 4}.

48 **a.** Équation équivalente à $-8u^2 + 16u - 8 = 0$; S = {1}.

b. Équation équivalente à $-x^2 + 5x = 0$; S = {0 ; 5}

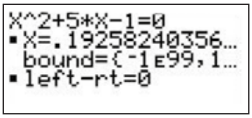
49 **a.** Équation équivalente à $(-x - 4)(9x - 2) = 0$; $S = \left\{-4 ; \frac{2}{9}\right\}$.

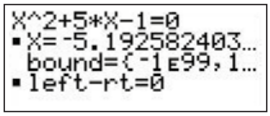
b. Équation équivalente à $81x^2 + 195x + 66 = 0$;

$S = \left\{-2 ; \frac{11}{27}\right\}$.

50 **1.** $x = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$.

2. Deux solutions :

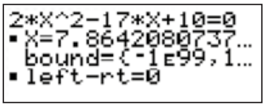


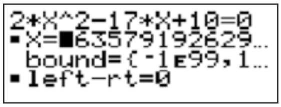


51 **1.** Équation équivalente à $2x^2 - 17x + 10 = 0$;

$x = \frac{17 - \sqrt{209}}{4} \approx 0{,}635$ ou $x = \frac{17 + \sqrt{209}}{4} \approx 7{,}864$.

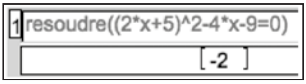
2. Deux solutions :





52 **1.** Équation équivalente à $4x^2 + 16x + 16 = 0$; $S = \{-2\}$.

2.



53 **a.** $-3^2 + 7\times 3 + c = 0$, d'où $c = -12$.

b. L'autre solution de $-x^2 + 7x - 12 = 0$ est 4.

54 **a.** L'équation admet une unique solution si, et seulement si, le discriminant du polynôme du second degré associé est nul. Or $\Delta = 9 - 72a$. Le réel a cherché est donc $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

b. Cette solution est $x_0 = -12$.

55 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

56 L'équation n'admet pas de solution si, et seulement si, le discriminant du polynôme du second degré associé est strictement négatif. Or $\Delta = b^2 - 4$. L'ensemble des réels solution est]–2 ; 2[.

57 **Faux** : il suffit de prendre $P(x) = x^2 - 1$ et $Q(x) = 2x^2 - 2$.

Réciproque : « Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes du second degré. Si $P(x) = Q(x)$, alors $P(x)$ et $Q(x)$ ont les mêmes racines. »

Vrai.

58 **Vrai**. Réciproque : « Soit une équation du second degré. Si cette équation a une seule solution, alors son discriminant est nul. »

Vrai. Cette équation s'écrit sous la forme $a(x - x_0)^2 = 0$, ce qui équivaut à $(x - x_0)^2 = 0$, ou encore à $x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0$.

On obtient $\Delta = 4x_0^2 - 4x_0^2 = 0$.

59 **Vrai**. Comme a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$, donc $b^2 - 4ac > 0$ donc $\Delta > 0$. D'où les deux solutions. Réciproque : « Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions alors a et c sont de signes contraires. »

Faux : il suffit de considérer l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.

60 **Exercice résolu, voir p. 67 du manuel.**

61 Équation équivalente pour $x \neq 3$ à $x^2 - 8x + 16 = 0$; $x_0 = 4$.

62 Équation équivalente pour $x \neq -5$ à $x^2 - 42x - 88 = 0$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 44$.

63 Équation équivalente à $x(x^2 + 3x - 4) = 0$; S = {0 ; –4 ; 1}.

64 Équation équivalente à $-x^2 - 8x + 9 = 0$ ou $9x^2 + 8x - 1 = 0$;

$S = \left\{1 ; -9 ; -1 ; \frac{1}{9}\right\}$.

65 **Vrai**. $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 0 = 9$.

66 **Vrai**. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2015 \times (-3,14) > 0$.

67 **Faux**. Ce sont les mêmes racines.

68 n est solution de l'équation $n^2 + n = 380$, ou encore de $n^2 + n - 380 = 0$. On trouve $n = -20$ ou $n = 19$.

69 Soit n le deuxième des trois nombres ; n est solution de $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 1\,877$, ou encore à $3n^2 - 1\,875$. Ainsi, $n = -25$ ou $n = 25$. Les trois nombres sont soit –26, –25 et –24 soit 24, 25 et 26.

70 x est solution de l'équation $(x-25)(x+25) = 1\,139$, ou encore de $x^2 - 1\,764 = 0$. On trouve $x = -42$ (solution non retenue) ou $x = 42$.

71 Soit m l'âge de Marion et r celui de Romain. L'âge m de Marion ($m \geqslant 1$) est solution de l'équation $m^2 - 1 = 8(m-1)$, ou encore de $m^2 - 8m + 7 = 0$. On trouve $m = 1$ ou $m = 7$. Et alors $r = 1$ ou $r = 49$, respectivement.

72 Si n désigne le nombre de bancs et p le nombre de personnes par banc, on a : $np = 800$ et $(n-20)(p+2) = 800$.
En exprimant p en fonction de n, on obtient l'équation : $2n^2 - 40n - 16\,000 = 0$.
La solution qui convient est $n = 100$.
Il y a 8 personnes par banc.

73 Le taux t est solution de l'équation $200(1+t)^2 = 338$, ou encore de $(1+t)^2 = 1,69$. On trouve $t = -2,3$ (solution non retenue car $t > 0$) ou $t = 0,3$. Il s'agit d'une augmentation de 30 %.

74 n participants ont serré la main à $n-1$ participants : il y a donc eu $n(n-1) : 2$ poignées. Par conséquent, $n(n-1) = 650$, soit $n^2 - n - 650 = 0$. Donc $n = 26$ ($n = -25$ ne convient pas).

75 **Vrai**. L'énoncé se traduit directement par l'équation $x^2 + 0,5x = 150$.

76 **Faux**. Il y a aussi $x = -12,5$.

77 **a.** $A(x) = 8(x-0,5)(x+1,25) = (2x-1)(4x+5)$.
b. Pas de factorisation.

78 **a.** $C(x) = 4(x+3,5)^2 = (2x+7)^2$.
b. $D(x) = 5(x+3)(x-0,8) = (x+3)(5x-4)$.

79 **a.** $E(x) = -4(x-1)(x-0,75) = (x-1)(-4x+3)$.
b. $f(x) = -4(x-1)(x-4,5) = (x-1)(-4x+18)$.

80 **a.** $G(x) = -\ (x+2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = (x+2)(-3x+1)$.
b. $H(x) = (x-8)(x-6)$.

81 **a.** Pas de factorisation possible pour $I(x)$.
b. $J(x) = 6\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = (2x-1)(3x+1)$.

82 Tout polynôme du type $f(x) = a(x-5)^2$, avec a réel non nul, convient.

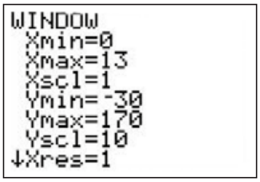
83 Tout polynôme du type $f(x) = a(x+2)(x-7)$, avec a réel non nul, convient.

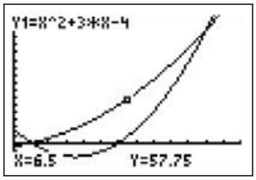
84 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

85 **1.** $f(x) = (x-1)(x+4)$.

2. $x^2 + 3x - 4 = 3(x-1)(x-6)$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 3(x-1)(x-6)$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+4-3x+18) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(-2x+22) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 11$.

3.

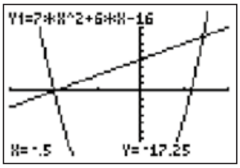


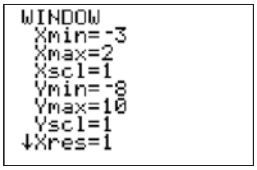


4. Conjecture : $x = 1$ ou $x = 11$.
Les résultats ainsi obtenus sont cohérents.

86 **1.** $7x^2 + 6x - 16 = (x+2)(7x-8)$.

2. Conjecture : deux solutions.





3. $7x^2 + 6x - 16 = 2x + 4 \Leftrightarrow (x+2)(7x-8) = 2(x+2)$
$\Leftrightarrow (x+2)(7x-8-2) = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(7x-10) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \dfrac{10}{7}$

87 **Vrai**. Le polynôme admet deux racines.

88 **Faux**, d'après le cours.

89 **a.**

x	$-\infty$		$-2,6$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

90 **a.**

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

b.

x	$-\infty$		$0,6$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

91 **a.**

x	$-\infty$		$1/6$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

b.

x	$-\infty$		$-9/16$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

92 **a.** $S = \mathbb{R}$. **b.** $S = [1,5 ; 4]$.

93 **a.** $S = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right[\cup]0 ; +\infty[$. **b.** $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

94 **a.** $S = \mathbb{R}$. **b.** Pas de solution.

95 **Exercice corrigé, voir p. 284 du manuel.**

96 **Exercice résolu, voir p. 68 du manuel.**

97 **a.** Inéquation équivalente à $-9x^2 + x - 4 < 0$; pas de solution.
b. Inéquation équivalente à $x^2 + 16x - 17 < 0$; $S =]-17 ; 1[$.

98 **a.** Inéquation équivalente à $(4x-4)(14x+2) > 0$;
$S = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{7}\right[\cup]1 ; +\infty[$.
b. Inéquation équivalente à $(2x-7)(2x+7) > 0$;

$S =]-\infty ; -3{,}5[\cup]3{,}5 ; +\infty[$.

99 **a.** Inéquation équivalente à $2x^2 + 8x - 10 \geqslant 0$; $S =]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$.

b. Inéquation équivalente à $x^2 < 4$; $S =]-2 ; 2[$.

100 $x^2 + 1 < 0$, $(x-2)^2 + 3 < 0$...

101 Toute inéquation du type $a(x+2)(x-4) < 0$, avec $a > 0$.

102 Toute inéquation du type $a(x-3)(x-5) \geqslant 0$, avec $a > 0$.

103 **1. Vrai**. f gardant un signe constant, cela implique $\Delta < 0$.

2. Contraposée : « Si $\Delta \geqslant 0$ alors, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. »

Faux : il suffit de prendre $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

3. Réciproque : « Si $\Delta < 0$ alors, pour tout réel x, $f(x) < 0$. »

Faux : il suffit de prendre $f(x) = x^2 + 1$.

104 **a.** Oui.

b. Non : s'il y a deux racines, il y a alternance des signes.

c. Non : s'il y a une racine double, il y a le même signe.

d. Oui.

105 **Faux** : $10\,000\,x^2 - 1$ est négatif pour tout réel x compris entre $-0{,}01$ et $0{,}01$.

106 **Faux** : $f(x) = x^2 + 3x + 2$ est strictement négatif sur $]-2 ; -1[$.

107 **1.** Les éventuelles abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$. La résolution de l'équation donne $x = -1$ ou $x = 4$. Donc $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-1 ; 0)$ et $(4 ; 0)$.

2. Cette position dépend du signe de $f(x)$ **:**

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{P}$ est au-dessous de l'axe des abscisses lorsque x est dans $]-1 ; 4[$ et au-dessus sinon.

108 **a.** *Remarque : il faut lire* $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

$\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

b. $\mathcal{P}$ reste au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe qu'au point de coordonnées $\left(\frac{1}{6} ; 0\right)$.

109 **a.** $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $\left(-\frac{1}{6} ; 0\right)$ et $(2 ; 0)$. Donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses lorsque x est dans $\left[-\frac{1}{6} ; 2\right]$ et au-dessous sinon.

b. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1{,}5 ; 0)$ et $(3{,}5 ; 0)$. Donc $\mathcal{P}$ est au-dessous de l'axe des abscisses lorsque x est dans $[1{,}5 ; 3{,}5]$ et au-dessus sinon.

110 **a.** $S(4 ; -15)$; $x = 4$. **b.** $S(-3 ; -18)$; $x = -3$.

c. $S(2{,}5 ; 10{,}25)$; $x = 2{,}5$. **d.** $S(1 ; 1)$; $x = 1$.

111 **1.** Les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ sont solutions de $2x^2 - 7x + 3 = 10x + 12$, ou encore de $2x^2 - 17x - 9 = 0$. Donc $x = -0{,}5$ ou $x = 9$. De plus, $f(-0{,}5) = g(-0{,}5) = 7$ et $f(9) = g(9) = 102$. Les points d'intersection ont pour coordonnées $(-0{,}5 ; 7)$ et $(9 ; 102)$.

2. La position relative de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ dépend du signe de $f(x) - g(x) = 2x^2 - 17x - 9$.

• Si $-0{,}5 < x < 9$, alors $f(x) < g(x)$ donc $\mathcal{P}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$.

• Si $x < -0{,}5$ ou $x > 9$, alors $f(x) < g(x)$ donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

112 **1.** Les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ sont solutions de $x^2 + 2x = -3x^2 + 6x + 15$, ou encore de $4x^2 - 4x - 15 = 0$. Donc $x = -1{,}5$ ou $x = 2{,}5$. De plus, $f(-1{,}5) = g(-1{,}5) = -0{,}75$ et $f(2{,}5) = g(2{,}5) = 11{,}25$. Les points d'intersection ont pour coordonnées $(-1{,}5 ; 0{,}75)$ et $(2{,}5 ; 11{,}25)$.

2. La position relative de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ dépend du signe de $f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x - 15$.

• Si $-1{,}5 < x < 2{,}5$ alors $f(x) < g(x)$ donc $\mathcal{P}$ est au-dessous de $\mathcal{Q}$.

• Si $x < -0{,}5$ ou $x > 9$, alors $f(x) > g(x)$ donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{Q}$.

113 C et $\mathcal{P}_3$: signe de a ; B et $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{P}_2$ coupe l'axe des abscisses en deux points ; A et $\mathcal{P}_1$: ordonnée à l'origine.

114 **1.** Non : pas de point d'intersection.

2. $x_1 = -15$ et $x_2 = 20$.

3. La fenêtre est mal choisie !

115 $f(x) = -\dfrac{3}{16}(x+1)^2 + 5$.

116 $f(x) = -0{,}5\,(x+4)(x-8)$

117 **Exercice résolu, voir p. 70 du manuel.**

118 $f(x)$ s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$.

a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} a+b+c=8 \\ a-b+c=6 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases}$

En soustrayant la deuxième équation à la première, on a $b = 1$.

On déduit ensuite $\begin{cases} a+c=7 \\ 4a+c=-2 \end{cases}$, ce qui donne $a = -3$ et $c = 10$.

Donc $f(x) = -3x^2 + x + 10$.

119 Parabole bleue : $f(x) = 2(x+1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$.

Parabole rouge : $g(x) = -(x-1)(x-5) = -x^2 + 6x - 5$.

120 $a = -1 < 0$ donc f est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en $x = -\dfrac{2}{2 \times (-1)} = 1$ et vaut $f(1) = -9$.

121 **a.** Maximum atteint en $x = -\dfrac{8}{2 \times (-2)} = 1$ et valant $f(2) = 11$.

b. Minimum atteint en $x = -\dfrac{2}{2 \times 3} = -\dfrac{1}{3}$ et valant $\dfrac{2}{3}$.

122 **a.** Minimum atteint en $x = -4$ valant -8.

b. Maximum atteint en $x = 2{,}5$ et valant $3{,}25$.

123 **1.** Algorithme complété :

```
Variables     a, b, c, α et β sont des nombres réels
Entrée        Saisir a, b et c
Traitement    Si a > 0
                  Alors afficher « minimum »
                  Sinon afficher « maximum »
              Fin Si
              α prend la valeur –b/(2*a)
              β prend la valeur (–b²+4*a*c)/(4*a)
Sortie        Afficher α et β
```

2. Programmation sur calculatrice :

Texas	Casio
PROGRAM:VARTRIN	====VARTRIN====
:Prompt A,B,C	?→A:?→B:?→C↵
:If A<0	If A<0↵
:Then	Then "MAXIMUM"↵
:Disp "MAXIMUM"	Else "MINIMUM"↵
:Else	IfEnd↵
:Disp "MINIMUM"	–B/(2*A)→D◢
:End	(–B^2+4*A*C)/(4*A)→E◢
:–B/(2*A)→D	
:Disp D	
:(–B^2+4*A*C)/(4*A)→E	
:Disp E	

3. 120 : maximum ; $\alpha = 1$; $\beta = -9$.

121. a. : maximum ; $\alpha = 2$; $\beta = 11$.

121. b. : minimum ; $\alpha = -\frac{1}{3}$; $\beta = \frac{2}{3}$.

122. a. : minimum ; $\alpha = -4$; $\beta = -8$.

122. b. : maximum ; $\alpha = 2{,}5$; $\beta = 3{,}25$.

124 **a. Vrai** (cours).

Réciproque : « Si une parabole qui représente une fonction polynôme du second degré ne coupe pas l'axe des abscisses, alors la fonction n'a pas de racine. » **Vrai**.

125 **Faux** : il suffit de prendre $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Réciproque : « Si la parabole représentant la fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ est toujours « au-dessus » de l'axe des abscisses, alors $c > 0$. »

Vrai car $f(0) = c$ et $f(0) > 0$.

126 **Exercice, voir p. 284 du manuel.**

127 **Vrai**. $-2x^2 - 16x + 18$ est positif pour x compris entre –9 et 1.

128 **Vrai**. Il est atteint en –2.

129 **1.** ($\Delta = 484$) $x_1 = 5$ et $x_2 = -\frac{7}{3}$.

2.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $S = \left]-\infty ; -\frac{7}{3}\right] \cup [5 ; +\infty[$.

130 **1.** $a = -3 < 0$ donc f est croissante puis décroissante.

2. f admet donc un maximum, atteint en $x = \frac{-12}{2 \times (-3)} = 2$ et vaut $f(2) = 7$.

131 $f(x) = 2(x+3)(x-5) = 2x^2 - 4x - 30$.

132 **1.** S (0,25 ; –4).

2. $f(x) = 0$ équivaut à $x = -0{,}25$ ou $x = 0{,}75$. $\mathscr{P}$ est au–dessous de l'axe des abscisses pour $-0{,}25 < x < 0{,}75$ et au–dessus sinon.

133 Les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$ sont solutions de $-3x^2 + 4x - 1 = -3x + 1$, ou encore de $-3x^2 + 7x - 2 = 0$. Donc $x = 2$ ou $x = \frac{1}{3}$.

De plus, $f(2) = g(2) = -5$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Les points d'intersection ont pour coordonnées (2 ; –5) et $\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$.

La position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$ dépend du signe de $f(x) - g(x) = -3x^2 + 7x - 2$. $\mathscr{P}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ pour $\frac{1}{3} < x < 2$ et au-dessous sinon.

134 ($\Delta = 1$) $x_1 = -1{,}5$ et $x_2 = -1$.

135 ($\Delta = 289$) $x_1 = -3{,}25$ et $x_2 = 1$.

136 ($\Delta = 64$) $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = 2$.

137

x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

138

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

139

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

140

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Travaux pratiques

TP 1 Programmation et calcul formel pour le second degré

Fichier associé sur le site www.bordas-indice.fr :

et 733200_chap03_TP1prof.xws (Xcas).

Fichiers associés dans le manuel numérique Premium :

733200_chap03_TP1prof.ggb (GeoGebra)

et 733200_chap03_TP1prof.xws (Xcas).

L'objectif de ce TP est de travailler, dans une première partie, un algorithme de résolution d'une équation du second degré et, dans une seconde partie, d'utiliser les fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel (résolution, écriture canonique et factorisation).

A. Algorithme de résolution d'une équation de second degré

1. L'algorithme, successivement, connaît les coefficients du trinôme du second degré, calcule le discriminant, affiche l'absence de racines si le discriminant est négatif strictement et affiche les racines (qui peuvent être doubles) si le discriminant est positif.

2. On remplace « Sinon Afficher $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ » par :

« Sinon

Si $\Delta = 0$ Alors Afficher $-b/(2a)$

Sinon Afficher $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ ».

3.

TI	Casio
PROGRAM:VARTRIN	====VARTRIN====
:Prompt A,B,C	?→A:?→B:?→C :
:B^2–4*A*C→D	–B/(2*A)→D◢
:If D<0	B^2–4*A*C→D↵
:Then	If D<0↵
:Disp "Pas de solution"	Then "Pas de solution"↵
:Else	Else
:If D=0	If D=0↵
:Then	Then
:Disp –B/(2*A)	–B/(2*A)◢
:Else	Else
:Disp (–B–√D)/(2*A),	(–B–√D)/(2*A)◢
(–B+√D)/(2*A)	(–B+√D)/(2*A)◢
:End	IfEnd
:End	IfEnd

On peut aussi demander systématiquement l'affichage de D et le nombre de solutions...

B. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

1. a. $x = \dfrac{-7-\sqrt{157}}{6}$ ou $x = \dfrac{-7+\sqrt{157}}{6}$.

b. $x = \dfrac{7-3\sqrt{69}}{22}$ ou $x = \dfrac{7+3\sqrt{69}}{22}$.

c. Pas de solution.

2. a. $x < \dfrac{9-\sqrt{73}}{4}$ ou $x > \dfrac{9+\sqrt{73}}{4}$.

b. $\dfrac{-7-\sqrt{109}}{6} < x < \dfrac{-7-\sqrt{109}}{6}$

c. $\mathbb{R}$. **d.** $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

3. a. $5\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{41}{4}$. **b.** $4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{35}{4}$.

c. $-3\left(x-\dfrac{7}{6}\right)^2+\dfrac{121}{12}$

4. a. $\left(x-\dfrac{7-\sqrt{69}}{2}\right)\left(x-\dfrac{7+\sqrt{69}}{2}\right)$.

b. $12\left(x+\dfrac{7+\sqrt{193}}{24}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{193}}{24}\right)$.

c. $-3\left(x+\dfrac{13+\sqrt{373}}{6}\right)\left(x+\dfrac{13-\sqrt{373}}{6}\right)$.

5. a. Le logiciel donne les expressions des solutions calculées lorsque le discriminant est strictement positif.

b. Le logiciel donne pour somme la valeur $-\dfrac{b}{a}$ et, pour produit, la valeur $\dfrac{c}{a}$.

c. Lorsque les deux racines du polynôme ax^2+bx+c existent, leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit vaut $\dfrac{c}{a}$.

TP2 Le meilleur prix d'un appareil photo

Fichiers associés sur le site www.bordas-indice.fr et le manuel numérique Premium :

77300_chap03_TP2prof.xls (Excel)

77300_chap03_TP2prof.ods (OpenOffice).

L'objectif de ce TP est d'utiliser un tableur pour conjecturer la solution d'un problème, dans un premier temps, et de prouver algébriquement, dans un second temps, ces conjectures associées à des fonctions polynômes du second degré.

A. Premiers calculs

1. a. $420 - 4 \times 100 = 20$ appareils.

b. $15 \times 20 + 5\,600 = 5\,900$ €.

c. $100 \times 20 = 2\,000$ €.

2. a. $x \leqslant 105$ €.

b. La quantité $420 - 4x$ doit être positive donc x doit être inférieure à 105.

B. Étude expérimentale

1. Formule en **A3** : **=A2+1**.

2. Formule en **B2** : **=420–4*A2**.

3. Formule en **C2** : **=A2*B2**.

4. Formule en **D2** : **=15*B2+5600**.

5. Formule en **E2** : **=C2–D2**.

6. Voir fichier associé.

7. Voir fichier associé.

8. a. À 35 ou 85 euros.

b. Entre 35 et 85 euros.

c. 2 500 euros pour 60 appareils.

C. Modélisation

1. $R(x) = x(420 - x) = -4x^2 + 420x$.

2. $C(x) = 15(420 - 4x) + 5\,600 = 11\,900 - 60x$.

3. $B(x) = R(x) - C(x) = 4x^2 + 420x - (11\,900 - 60x)$
$= -4x^2 + 480x - 11\,900$.

4. $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]35\,;85[$.

5. $a = -4 < 0$ donc B est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en $x = -\dfrac{480}{2\times(-4)} = 60$ et vaut $B(60) = 2\,500$ €.

Pour approfondir

141 **a.** $x \neq -1$ et $x \neq 0$.
Équation équivalente à $x^2 + x - 6 = 0$.
Deux solutions, $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.

b. $x \neq -2$ et $x \neq 1$.
Équation équivalente à $-12x^2 - 12x + 9 = 0$.
Deux solutions : $x_1 = 0{,}5$ et $x_2 = -1{,}5$.

142 Les abscisses des points d'intersection des deux courbes vérifient l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$, soit $x = -1{,}5$ ou $x = 2$.

143 **1. a.** Deux solutions, $u_1 = -2$ et $u_2 = \dfrac{3}{2}$.

b. $u = x^2$ donc u est positif.

c. $x^2 = \dfrac{3}{2}$, ce qui équivaut à $x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ou $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2. $(u = -5$ ou $u = 1)$ $x = -1$ ou $x = 1$.

144 Soit n le nombre de jours de travail du père et s son salaire quotidien. Le problème se traduit par les deux équations :

$$ns = 500 \text{ et } (n-5)(s-8) = 240.$$

On trouve que s est une solution de l'équation :

$$s^2 - 60s + 800 = 0.$$

On obtient $s = 20$ ou $s = 40$. Si $s = 20$, alors $n = 25$; si $s = 40$, alors $n = 12{,}5$, ce qui est exclu.
Conclusion : le père travaille 25 jours pour un salaire quotidien de 20 € ; le fils 20 jours pour 12 € par jour.

145 $3x^2 + 7x - 6$ s'annule en $x = -3$ et en $x = \frac{2}{3}$; $4x^2 + 3x - 10$ s'annule en $x = -2$ et en $x = \frac{5}{4}$.

$S =]-\infty\,;-3] \cup \left]-2\,;\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

146 Dans cet exercice, la calculatrice sert à conjecturer, vérifier ou corriger des résolutions algébriques d'inéquations.

2. $\frac{2x-1}{x-3} > 0$ si $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 3$.

4. $\frac{2x-1}{x-3} > -5x + 7$ équivaut à $\frac{5x^2 - 20x + 20}{x-3} > 0$, soit :

$\frac{5(x-2)^2}{x-3} > 0$, d'où $x > 3$.

147 Soit n le nombre initial de personnes et p la part initiale pour chacun.

On écrit $np = 4\,000$ et $4\,000 = (n - 4)(p + 50)$.
On obtient ainsi : $50n^2 - 200n - 16\,000 = 0$.
Les solutions sont 20 et –16.
Par conséquent : $n = 20$ et $p = 200$.

148 $t > 0$ est solution de l'équation :

$$\left[1\,600\left(1 + \frac{t}{100}\right) + 400\right]\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 2\,091$$

ou encore de l'équation :

$$1\,600\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 + 400\left(1 + \frac{t}{100}\right) - 2\,091 = 0.$$

On trouve $1 + \frac{t}{100} = 1{,}025$. Donc $\frac{t}{100} = 0{,}025$.

Le taux est égal à 2,5 %.

149 **1.** $O(q) = 43$ équivaut à $2q^2 + 1{,}5q - 26 = 0$. Donc $q = 3{,}25$ tonnes (dans [0 ; 10]).

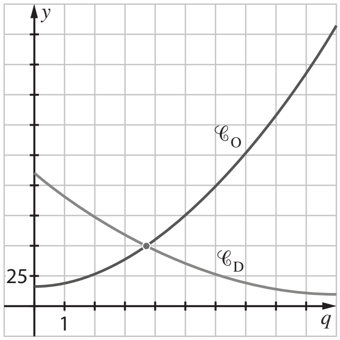
2. $D(q) = 26$ équivaut à $q^2 - 20q + 84 = 0$. Donc $q = 6$ tonnes (dans [0 ; 10]).

3. Tableaux de variation :

x	0		10
$O(x)$	17	↗	232

x	0		10
$D(x)$	110	↘	10

4.



5. a) On lit $q_0 \approx 3{,}1$.

b) $O(q) = D(q)$ équivaut à $2q^2 + 1{,}5q + 17 = q^2 - 20q + 110$, ce qui équivaut à $q^2 + 21{,}5q - 93 = 0$. La résolution donne $q_0 = \frac{-21{,}5 - \sqrt{834{,}25}}{2} \approx 3{,}69$ tonnes. Le prix d'équilibre est $O(q_0) = D(q_0) \approx 50$ euros.

150 $R(n) = 0{,}002n^2 - n - 120$.
$R(n) = 600$ si $0{,}002n^2 - n - 720 = 0$, soit $n = 900$.
Il y a bénéfice si $R(n)$ est positif, soit $n > 600$.

151 $10\,000\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t+1}{100}\right) = 11\,130$, soit $t^2 + 201t - 1\,030 = 0$, soit $t = 5$. Taux : 5 %.

152 **1. a.** Il y a une baisse de 2 €, donc de 20 fois 0,10 €. Il va donc y avoir 20 fois 10 spectateurs en plus, soit 200. Il y aura donc en tout 500 spectateurs.

b. Sa recette vaut donc 500×5 €, soit 2 500 €.

2. Il faut avoir 1 000 – 300 spectateurs en plus, soit 700, soit 70 fois 10 spectateurs. Le prix serait donc diminué de $70 \times 0{,}1$ €, soit de 7 €. Il vaudrait alors... 0 € ! Ce résultat n'est pas envisageable pour le propriétaire !

3. a. $7 - 0{,}1x$.

b. Le nombre de spectateurs est $30 + 10x$.
La recette est $r(x) = (7 - 0{,}1x)(300 + 10x)$, c'est-à-dire $r(x) = -x^2 + 40x + 2\,100$.

c.

x	0		10		70
$r(x)$	2 100	↗	2 500	↘	0

d. La recette maximale est égale à 2 500 € et correspond à 20 réductions. Le prix du billet vaut $7 - 0{,}1 \times 20$ €, soit 5 €. Le nombre de spectateurs est égal à $300 + 10 \times 20$ €, soit 500.

153 **1. a.** 50 est égal à 5 dizaines. $C(5) = 3$ (€).

b. Chaque dizaine de pièces est vendue $10 \times 0{,}3$ €, soit 3 €. Donc x dizaines sont vendues $3x$ euros.

2. a. $B(x) = R(x) - C(x) = 3x - (x^2 - 8x + 18)$
$= 3x - x^2 + 8x - 18 = -x^2 + 11x - 18$.

b. $B(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2\,;9]$.

3.

x	0		5,5		10
$O(x)$	10	↗	12,25	↘	–8

4. a. Il faut vendre 5,5 dizaines de pièces, soit 55.

b. Le bénéfice maximal vaut 12,25 euros.

154 **1.** Traduction immédiate de l'énoncé.

2. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

3. $\varphi^2 = \varphi + 1 \Leftrightarrow \dfrac{\varphi^2}{\varphi} = \dfrac{\varphi+1}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

4. a. $\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi = (\varphi+1)\varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$.

b. $\varphi^4 = 3\varphi + 2$ et $\varphi^4 = 5\varphi + 3$.

155 **1.** Soit x et y ($x \neq y$) tels que $x + y = S$ et $xy = P$. Donc $y = S - x$. Donc $x(S - x) = P$. Donc $x^2 - Sx + P = 0$.

CNS : $(-S)^2 - 4 \times P > 0$, ou encore $S^2 > 4P$.

2. $S = L + l = 28$ et $P = L\,l = 195$. $x^2 - 28x + 195 = 0$ donne $L = 15$ et $l = 13$. ($L > l$)

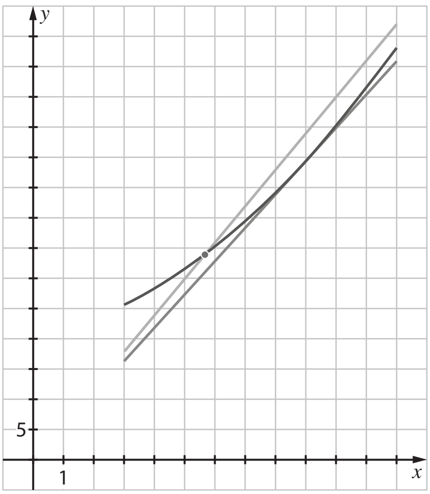
3. a.

Variables	S, P, L et l sont des nombres réels
Entrée	Saisir S et P
Traitement	Si $S^2 > 4P$ faire l prend la valeur (S−√(S²−4*P))/2 L prend la valeur (S+√(S²−4*P))/2 FinSi
Sortie	Afficher l, L

b.

Texas	Casio
PROGRAM:SOMPROD :Prompt S,P :If S²>4*P :Then :(S−√(S²−4*P))/2→A :(S+√(S²−4*P))/2→B :Disp A,B :End	==== SOMPROD ==== ?→S:?→P↵ If S²>4*P↵ Then (S−√(S²−4*P))/2→A◢ (S+√(S²−4*P))/2→B◢ IfEnd↵

156 **A : Étude d'une fonction**



B : Recherche d'un prix de vente

1. a. $R(10) = 55$. Recette de 5 500 euros.

b. $R(x) = 5{,}5x$.

On trace la droite d'équation $y = 5{,}5x$ et on voit que cette droite est située au-dessous de la parabole représentée dans la partie A, ce qui veut dire que le coût de production dépasse la recette. Ce prix de vente ne convient donc pas. On peut vérifier : $R(10) - C(10) = -0{,}25 < 0$.

2. a. $R(x) = 6x$.

b. Voir graphique.

c. On constate que la droite d'équation $y = 6x$ est située au dessous de la parabole représentant $\mathscr{C}$ si x entier compris entre 6 et 12. Il faut vendre au moins 6 tables.

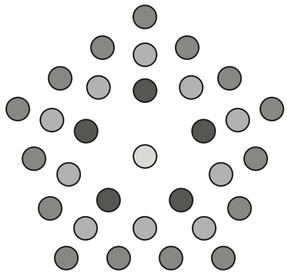
3. a. $B(x) = R(x) - C(x) = 6x - (0{,}25x^2 + x + 20{,}25)$

$= 6x - 0{,}25x^2 - x - 20{,}05$

$= -0{,}25x^2 + 5x - 20{,}25$.

b. Le bénéfice maximal est atteint en $x = -\dfrac{5}{2 \times (-0{,}25)} = 10$ et vaut $B(10) = 4{,}75$ centaines d'euros, soit 475 euros.

157 **1. a.** Les premiers nombres sont 1, 1 + 5 = 6, 6 + 10 = 6 + 2 5 = 16 (voir figure ci-dessous). Le nombre pentagonal centré suivant est 16 + 15 = 16 + 3 × 5 = 31.



b. Il faut en ajouter 4 × 5, soit 20.

2. a. Le rectangle est constitué de deux triangles identiques. Chaque triangle contient chacun $1 + 2 + \ldots + (n - 1)$ points. Le rectangle en contient $n(n - 1)$ d'où : $2(1 + 2 + \ldots + (n - 1)) = n(n - 1) = n^2 - n$. D'où $1 + 2 + ... + (\ ) = 0{,}5n^2 - 0{,}5n$.

b. Le n–ième nombre pentagonal centré comprend :

$1 + 5 + 5 \times 2 + \ldots + 5 \times (n - 1) = 1 + 5(1 + 2 + \ldots + (n - 1))$

$= 1 + 5 \times (0{,}5\ 0{,}5\ )$

$= 2{,}5n^2 - 2{,}5n + 1$ points.

c. L'équation $2{,}5n^2 - 2{,}5n + 1 = 2\,016$ donne des solutions non entières donc 2 016 n'est pas un nombre pentagonal centré.

158 **1.** Baisser une quantité de t % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$ et baisser une quantité de $(t + 5)$ % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t+5}{100}$. Le prix initial vaut 250 € et le produit final vaut 150 €, d'où l'équation.

2. t est compris entre 0 et 100.

$250\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)\left(1 - \dfrac{t+5}{100}\right) = 150$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{100 - t}{100}\right)\left(\dfrac{100 - (t+5)}{100}\right) = \dfrac{150}{250} = 0{,}6$

$\Leftrightarrow (100 - t)(95 - t) = 6\,000$

$\Leftrightarrow t^2 - 195t + 3\,500 = 0$

$\Leftrightarrow t = 20$ (ou $t = 175$, impossible).

Il y a eu une réduction de 20 %, puis de 25 %.